



Optimisation des états de surface et nouveau modèle de cavitation pour un écoulement lubrifié

Eric Dalissier

► To cite this version:

Eric Dalissier. Optimisation des états de surface et nouveau modèle de cavitation pour un écoulement lubrifié. Autre. INSA de Lyon, 2012. Français. NNT : 2012ISAL0048 . tel-00814525

HAL Id: tel-00814525

<https://theses.hal.science/tel-00814525>

Submitted on 17 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N d'ordre 2012-ISAL-0048

Thèse

Optimisation des états de surface et nouveau modèle de cavitation pour un écoulement lubrifié

Présentée par

Éric Dalissier

le 13 juin 2012,

devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Pour l'obtention du **DIPLÔME DE DOCTORAT**

École doctorale : InfoMaths (Informatique et Mathématiques)

Mention : Mathématiques Appliquées

Directeur de thèse

Mohammed Jai

Jury

Président :	Ton Lubrecht	Lamcos, INSA de Lyon
Rapporteurs :	Jean-Louis Ligier	HEIG-VD, Suisse
	Carlos Vázquez	Universidad de A Coruña, Espagne
Examineurs :	Guy Bayada	ICJ, INSA de Lyon
	Franck Choukroun	Renault, Rueil Malmaison
	Doina Cioranescu	LJLL, Paris
	Mohammed Jai	ICJ, INSA de Lyon
Invités :	Jean-Paul Cadalen	Renault, Rueil Malmaison
	Sorin Ciuperca	Université Claude Bernard, Lyon 1

**Optimisation des états de surface
au niveau du poste Piston/Segment/Chemise
sans altérer la fiabilité du moteur**

Résumé

Cette thèse est consacrée à la modélisation et à la simulation de l'ensemble PISTON /SEGMENT/ CHEMISE, d'un moteur thermique. Dans un moteur, le piston muni de segments est en mouvement relatif dans la chemise. Ce système est lubrifié par projection d'huile, les segments et la surface de la chemise "contrôlent" la quantité de lubrifiant restant sur la paroi.

Pour modéliser ce phénomène, le modèle conservatif parabolique-hyperbolique d'Elrod-Adams ($P - \theta$), prenant en compte la cavitation (présence de gaz dans le fluide, aspect multiphasique de l'écoulement), est couplé à un modèle de contact, celui de Greenwood-Tripp (basé sur une approche statistique de la surface). En se restreignant à l'écoulement et au contact, nous négligeons beaucoup de phénomènes physiques pouvant intervenir comme le grippage ou les effets thermiques.

Dans une première partie, les phénomènes mécaniques sont étudiés, de la réalisation de la surface des chemises à la modélisation de la physique de la lubrification du contact segment/chemise. Cette étude expose les simplifications effectuées et le choix des conditions aux limites pour la prise en compte de la cavitation en tant que problème à frontière libre, notamment au niveau du débit d'entrée pour simuler un fonctionnement "normal".

Dans une deuxième partie, la mise en oeuvre et la modification de l'algorithme "classique" pour des surfaces mesurées sont décrites en détail. Nous présentons les performances simulées de différentes surfaces, et nous les comparons à des essais effectués par Renault. Dans une troisième partie, des modifications sont introduites au modèle ($P - \theta$) utilisé précédemment afin de rendre l'écoulement cohérent avec le modèle de Navier-Stokes. Bien que ce nouveau problème puisse être posé en dimension 2, l'étude mathématique ne concerne que la dimension 1. On se ramène à un système dynamique dont les inconnues sont les frontières libres. L'unicité de la solution impose l'introduction d'un paramètre artificiel. Le comportement local et/ou global en temps est déterminé par les paramètres géométriques et les conditions aux limites. L'introduction de deux paramètres supplémentaires permet de démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

Dans une dernière partie, nous comparons le modèle de cavitation proposé avec le modèle $P - \theta$.

Mots clef

lubrification, modèle d'Elrod-Adams, modèle de Greenwood-Tripp, moteur, piston / segment/ chemise, nouveau modèle de cavitation, duplication de surfaces, différences finies.

Surface optimization and new cavitation model for lubricated flow

Abstract

This work deals with the modeling and simulation of contact between piston rings and liner of an engine. In the engine, the piston-rings are in relative motion with respect to the liner. This mechanism is lubricated and the purpose of this piston-ring system is to control sealing between combustion chamber and lower part of engine, keeping under control lubricant quantity on the surfaces.

We modeled this phenomenon using the Elrod-Adams models ($P - \theta$), which are conservative parabolic-hyperbolic models, taking into account the cavitation phenomenon (the presence of gas bubbles in fluid, so that it can be understood a multiphased flow) coupled with the Greenwood-Tripp model, which models the elastic contact by a statistical approach.

When we focus on the modeling of the oil flow and asperity contacts, we neglect many physical phenomena like scuffing and thermal effects.

In the first part, we focus on the kinematics of the engine, from the design to the different models to describe a lubricated contact. We explain all the simplifications in the engine body and the boundary conditions we use in the cavitation model to solve it as a free boundary problem, in particular for the choice of the flow rate to simulate a “normal functioning”.

In the second part, we describe the algorithm implementation and the required modifications when using real surface topography. We compare several surfaces and study the influence of simulation parameters, then we compare the result with experimental data obtained by Renault company.

In the third part, we modify the ($P - \theta$) model, to have the same flow rate in the cavitation zone as in the Navier-Stokes model. It can be studied in 2-dimensions, however we only explain the mathematical study in 1D. We study this model as a dynamical system for which the unknown variables are the free boundaries. The uniqueness is imposed by the addition of an adjustable parameter. The local and global behavior in time are determined by geometrical parameters and boundary conditions.

In the last part, we compare the new cavitation model with the $P - \theta$ model.

Keys words

Lubrication, Elrod-Adams model's, conservation laws, Greenwood-Tripp model's, engine, piston-ring-sleeve, new cavitation model's, surface duplication, finite differences, mixed lubrication.

Ce travail a été effectué dans le cadre d’une thèse CIFRE au sein de l’équipe “simulation fatigue - frottement” de Renault et du laboratoire de mathématiques I.C.J UMR CNRS 5208 à l’INSA de Lyon. La plus grande partie concerne la modélisation de l’écoulement d’un lubrifiant dans l’ensemble segment-chemise en utilisant un modèle conservatif et en prenant en compte la géométrie réelle des surfaces ainsi que la possibilité de contact entre elles. La dernière partie décrit un nouveau modèle de cavitation. (présence de gaz dans le fluide, aspect multiphasique de l’écoulement)

Dans le premier chapitre, nous montrons l’intérêt potentiel de ces travaux dans le cadre de la diminution globale des frottements mécaniques dans l’ensemble du moteur. Nous donnons un bref aperçu des techniques de fabrication qui expliquent la présence de rugosités sur les surfaces et leur difficile maîtrise du point de vue de la géométrie. Notons aussi qu’expérimentalement, on sait depuis longtemps que les surfaces trop lisses ne sont pas satisfaisantes du point de vue du fonctionnement global de l’ensemble piston-chemise sans que l’on puisse facilement l’expliquer. L’idée générale est que les “creux” des rugosités peuvent servir de réservoir de lubrifiant, se remplissant lorsque l’on se trouve dans une zone de film plein et se vidant lorsque la pression locale du fluide tend à diminuer. On voit la nécessité tout à la fois d’utiliser un modèle permettant de décrire correctement les changements de phase (cavitation) à l’intérieur du fluide et d’introduire une géométrie la plus réaliste possible.

En ce qui concerne la cavitation, son importance a été reconnue depuis longtemps dans la modélisation des systèmes lubrifiés. De nombreuses approches ont été proposées pour comprendre et calculer de manière efficace les écoulements lubrifiés en présence de ce phénomène. Depuis plusieurs années, le modèle le plus utilisé est le modèle $(P - \theta)$ (Jakobsson-Floberg-Olsson, Elrod-Adams), qui introduit deux inconnues, la pression P et la saturation locale θ . Les propriétés mathématiques de ce modèle sont bien connues et l’on sait qu’il est bien posé et possède une solution unique aussi bien en régime transitoire que stationnaire.

Dans la seconde partie, nous décrivons en détail la mise en œuvre et la modification de l’algorithme de calcul “classique” de résolution du modèle $(P - \theta)$ dans le contexte de l’ensemble piston-chemise. Deux difficultés essentielles sont apparues, la première est de déduire d’un échantillon de surface mesurée et nécessairement de taille réduite, une surface plus importante sur laquelle on effectuera les calculs. La seconde difficulté est induite par les très faibles épaisseurs de film d’huile obtenues qui vont nécessiter de tenir compte des contacts entre les rugosités de la chemise et le segment. Nous utiliserons l’approche proposée par Greenwood-Tripp qui considère une moyenne locale des effets élastiques provenant du contact entre les aspérités. Ceci permet de calculer une force de contact qui s’ajoute aux forces hydrodynamiques issues du modèle $(P - \theta)$. Une autre des difficultés concerne la valeur des constantes physiques intervenant dans le modèle de Greenwood-Tripp. Elles sont pour la plupart mal connues. Pour certaines d’entre elles, nous avons proposé une procédure de calcul à partir de la géométrie réelle de l’échantillon fournie par Renault, mais ces valeurs induisent de nombreuses difficultés numériques (non convergence de l’algorithme lorsque les charges imposées sont trop fortes). Ce n’est que très récemment que de nouvelles valeurs, obtenues par Renault, ont permis d’obtenir des résultats plus réalistes.

Malgré l’utilisation de machines de calcul dédiées, les temps de calcul sont extrêmement longs (il faut attendre une stabilisation du système) de l’ordre de 15 jours à fortes charges pour un maillage grossier. Néanmoins, il a été possible de comparer plusieurs types de géométries et d’obtenir des courbes de Stribeck qui synthétisent les valeurs du frottement pour diverses valeurs de charges.

La dernière partie est essentiellement mathématique. Elle vise à analyser un nouveau modèle de cavitation en régime transitoire. Ce modèle est issu du modèle $(P - \theta)$, utilisé dans notre algorithme de calcul, que l’on modifie localement dans la zone cavitée. Il a été observé expérimentalement dans certains cas que le lubrifiant dans la zone cavitée “adhère” à la surface en mouvement. On déduit souvent la hauteur

effective de ce film de lubrifiant à partir de la saturation θ du modèle $(P - \theta)$ classique. Cependant il apparaît une incohérence au niveau de la valeur du débit liée à cette représentation physique par rapport à celle induite par le modèle $(P - \theta)$. Ceci nous a conduit à modifier le modèle $(P - \theta)$ en imposant une “vitesse” du lubrifiant dans la partie cavitée qui permette de rendre cohérentes les deux expressions du débit. Bien que ce problème puisse être posé en dimension 2, l’étude mathématique ne concerne ici que la dimension 1. L’introduction de paramètres supplémentaires permet d’obtenir un théorème d’existence et d’unicité en régime transitoire. On se ramène à l’étude d’un système dynamique. Nous verrons l’influence du débit d’entrée, du paramètre λ (saturation minimum du lubrifiant) et des positions initiales des frontières de la zone de film plein sur l’évolution de ce système. Enfin on compare ce nouveau modèle au modèle $(P - \theta)$, tant du point de vue de l’évolution des frontières entre la zone pressurisée et les zones cavitées que des hauteurs de film d’huile.

Remerciements

Je remercie Ton Lubrecht de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse, Jean-Louis Ligier et Carlos Vázquez Cendón d'avoir accepté d'être rapporteurs, ainsi que Sorin Ciuperca et Doina Cioranescu d'avoir participé au jury.

Merci à mon directeur de thèse Mohammed Jaï d'avoir initié ce projet à la frontière entre les Mathématiques et la Physique. Je tiens à remercier tout particulièrement Guy Bayada pour toute l'aide qu'il m'a apporté et pour sa patience. Je suis également reconnaissant à mes encadrants de l'entreprise Renault, Franck Choukroun et Jean-Paul Cadalen, de m'avoir fait profiter de leur expertise.

Je remercie Romaric Pujol pour ses conseils de programmation, Irène Gannaz et Samuela Leoni-Aubin de m'avoir supporté comme collègue de bureau, et Bernard Roux pour m'avoir initié au bridge. Merci également à tous les membres du Pôle de Mathématiques de l'INSA de Lyon pour m'avoir mangé mes bonbons.

Je garde un bon souvenir des moments passés avec les doctorants de l'ICJ, de la fondue coréenne avec Farshid Dabaghi et Mathieu Fabre, aux visites de Lyon avec Ibrahim Sangare et Mahamadou Alassane.

Et enfin un grand merci à ma famille et à mes proches pour leur soutien et présence.

Table des matières

Nomenclature	1
1 Introduction	3
1.1 Le fonctionnement du moteur	5
1.2 Procédés de fabrication et rugosité	7
1.2.1 Procédés d'abrasion et de déformation plastique(de l'état 0 à l'état 1)	7
1.3 Méthode de texturation (de l'état 1 à l'état 2)	9
1.3.1 Procédé de microtexture à l'aide d'un diamant	9
1.3.2 Les procédés chimiques de création de textures	9
1.3.3 Laser et microstructure	10
1.4 L'usure et sa modélisation (de l'état 2 à l'état 3)	11
1.5 Mesure des rugosités et paramètres de rugosités	14
1.6 Les avaries	16
1.7 Modèle de film d'huile au contact segment/chemise - surface lisse	17
1.8 Approximation film mince (lubrification)	18
1.9 Les modèles de cavitation	21
1.9.1 Le modèle de Sommerfeld	22
1.9.2 Le modèle de Gümbel (demi-Sommerfeld)	22
1.9.3 Le modèle de Swift-Stieber (Reynolds)	22
1.9.4 Le modèle Jakobsson-Floberg-Olsson (JFO)	23

TABLE DES MATIÈRES

1.10	Sur les difficultés et limites de la modélisation des surfaces texturées	27
1.11	Modélisation du contact entre aspérités	29
2	Modélisation	35
2.1	Le système Piston-Segment-Chemise - Modélisation	35
2.1.1	Description	35
2.1.2	Forces imposées	35
2.1.3	Force hydrodynamique	36
2.1.4	Force de contact	38
2.1.5	Force de frottement	39
2.2	Résolution numérique du problème hydrodynamique	40
2.2.1	Adimensionnement	40
2.2.2	Discretisation	41
2.2.3	Algorithme de résolution du problème hydrodynamique	43
2.3	Prise en compte de la géométrie réelle	45
2.3.1	Aspect Recouvrement Générique	45
2.3.2	Aspect stockage	46
2.4	Problème de contact pour une géométrie réelle	48
2.4.1	Quelques exemples de constantes utilisées	49
2.4.2	Procédure de détermination du plan moyen	51
3	Résultats du modèle ($P - \theta$) avec des surfaces réelles	61
3.1	Paramètres de calcul	61
3.2	Obtention des surfaces – Une nouvelle approche	64
3.3	Influence de la méthode de recollement	67
3.4	Influence des paramètres de calcul	75
3.4.1	Paramètres de discrétisation et la Masse	75

3.4.2	Paramètres de la loi de contact $[\bar{k}, \sigma, H3]$	82
3.4.3	Comparaison des surfaces pour différents débits d'entrée	89
3.4.4	Estimation des pressions et des hauteurs de film	92
4	Nouveau modèle de cavitation	99
4.1	Un nouveau modèle de cavitation	99
4.1.1	Conditions limites en $x = 1$	102
4.2	Existence et unicité du nouveau modèle	106
4.2.1	Définition des zones admissibles	107
4.2.2	Étude du cas stationnaire	111
4.2.3	Étude du cas transitoire	112
5	Résultats numériques pour le nouveau modèle de cavitation	121
5.1	Discretisation du système	121
5.2	Conditions initiales et conditions aux limites	122
5.3	Résolution et résultats	123
6	Conclusion et perspectives	129
	Bibliographie	131

Table des figures

1.1	Estimation des frottements du moteurs [Ric00]	3
1.2	Nombre de véhicules particuliers en France entre 1970 et 2008	4
1.3	Évolution des taux limites de rejet de polluant pour les voitures neuves à essence [44309]	5
1.4	Description du moteur à explosion	6
1.5	exemple de surface obtenue avec un diamant [PJ07]	9
1.6	Exemple de textures à l'acide[CH07]	10
1.7	Exemple de texturation au laser [ES09]	11
1.8	Représentation de la vie d'un moteur	11
1.9	Présentation de différents cas d'usure	12
1.10	Surfaces fournies par Renault	13
1.11	Évolution de l'état de surface	13
1.12	Anamorphose d'état de surface	14
1.13	Courbe d'Abbott	15
1.14	Profil d'une surface permettant de calculer les paramètres statistiques	15
1.15	Schématisation du grippage d'un contact lubrifié[Fou94]	18
1.16	Courbe de Stribeck	19
1.17	Système d'axe en coordonnées cartésiennes [FRD90]	19
1.18	en haut : profil général du palier en bas : distribution de la pression	21
1.19	Distribution de la pression pour les différents modèles de cavitation[DT74]	23

TABLE DES FIGURES

1.20	représentation de θ et de l'écoulement [BC86]	24
1.21	Description des variables [CH71]	25
1.22	Relation entre la pression et la densité(a) et la saturation(b) (ρ_c : densité de cavitation) . . .	26
1.23	Charge hydrodynamique en fonction de l'excentricité pour différentes configurations du palier	28
1.24	frottement sur des surfaces neuves	29
1.25	frottement pour 2.10^5 cycles	30
1.26	comparatif des modèles d'Elrod-Adams et de Reynolds pour un cas texturé et un cas lisse . . .	31
1.27	Distance intervenant dans le modèle de Greenwood-Tripp-Williamson	31
2.1	Représentation du système PSC	36
2.2	Représentation du système piston-segment-chemise (PSC)	37
2.3	Les différentes forces appliquées	37
2.4	Représentation du domaine Ω et de la force hydrodynamique sur un segment	38
2.5	Représentation de la distance entre les 2 surfaces moyennes	39
2.6	algorithme de principe	44
2.7	Détermination et ajustement des variables pour une itération	45
2.8	Recouvrement de Ω avec une seule translation	46
2.9	Recouvrement avec deux translations	46
2.10	Élimination des discontinuités entre deux duplications	47
2.11	Évaluation de Ω à $t = 0$ et à $t = n_t \Delta t$	48
2.12	Aperçu de la méthode de recouvrement	49
2.13	à gauche, vu d'un profil de chemise ; à droite la courbe d'Abbott associée	50
2.14	Visualisation des paramètres statistiques de la norme ISO 13 565	50
2.15	Description de la sélection des surfaces en fonction de (Pz, ℓ) par élimination des vallées . . .	52
2.16	Erreur (Pz, ℓ) en fonction de Pz et de ℓ pour un seuil d'erreur de 10% pour $\sigma_{exp} = 0.053$. .	52
2.17	Couple (Pz, ℓ) et $(H3, \ell)$ pour différentes plages d'erreur pour la surface S_1 avec $\sigma_{exp} = 0.053$.	53

2.18	$H3$ en fonction de ℓ pour des seuils d'erreur inférieure à 10% pour $\sigma_{exp} = 0.074$ et $\sigma_{exp} = 0.08$	53
2.19	Description de la sélection des surfaces en fonction de (Pz, ℓ) par élimination des vallées et les pics isolés	54
2.20	Erreur(Pz, ℓ) en fonction de Pz et de ℓ pour $\sigma_{exp} = 0.053$ avec un seuil d'erreur de 10%	55
2.21	Couple (Pz, ℓ) et ($H3, \ell$) pour un seuil d'erreur de < 10% pour la surface S_1 avec $\sigma_{exp} = 0.053$	55
2.22	Couple ($H3, \ell$) pour des seuils d'erreurs inférieures à 10% et 0.1%	56
2.23	Couple ($H3, \ell$) pour un seuil d'erreur inférieur à 1% et à 0.1%, et le minimum global pour $\sigma_{exp} = 0.053$	57
2.24	Représentation des paramètres $h, H3$ dans le cas segment plat-chemise	59
2.25	Pression de contact pour la constante KT de Tomanik en fonction de $\frac{h}{\sigma}$ pour une position $z = 0.15 \mu m$ du segment plat	60
3.1	Représentation des 2 échantillons fournis par Renault	62
3.2	Représentation de la variable \bar{k}	64
3.3	Mise en évidence du motif de la surface L3	65
3.4	Duplication et vue du motif duplicable obtenu	66
3.5	Mise en évidence du motif de la surface L1	66
3.6	vue du motif duplicable obtenu	66
3.7	Vue du dessus de la surface extraite de L1 sur laquelle les calculs sont faits	67
3.8	Vue du dessus de la surface extraite de L3 sur laquelle les calculs sont faits	67
3.9	Segment type A coupe feu (CDF) essence 1.6L	67
3.10	Segment type P – racleur	68
3.11	Déplacements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L3 pour deux segments (type A, type P) à forte charge ($13\,333\, N.m^{-1}$)	68
3.12	Frottements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L3 pour deux segments (type A, type P) à forte charge ($13\,333\, N.m^{-1}$)	69
3.13	Frottements et déplacements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L3 générées avec la nouvelle méthode pour le segment type A, à forte charge et sans \bar{k}	69

TABLE DES FIGURES

3.14 Déplacements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L1 pour deux segments (type A, type P) à forte charge ($13\,333\text{ N.m}^{-1}$)	70
3.15 Frottements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L1 pour deux segments (type A, type P) à forte charge ($13\,333\text{ N.m}^{-1}$)	70
3.16 Frottements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L3 pour deux segments (type A, type P) à forte charge (200 N.m^{-1})	71
3.17 Déplacements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L3 pour deux segments (type A, type P) à forte charge (200 N.m^{-1})	72
3.18 Zoom du déplacement des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L3 pour deux segments (type A, type P) à forte charge (200 N.m^{-1})	72
3.19 Frottements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L1 pour deux segments (type A, type P) à forte charge (200 N.m^{-1})	73
3.20 Déplacements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L1 pour deux segments (type A, type P) à forte charge (200 N.m^{-1})	74
3.21 Zoom du déplacement des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L1 pour deux segments (type A, type P) à forte charge (200 N.m^{-1})	74
3.22 Représentation des déplacements du minimum du segment au cours du temps pour la surface L1 à forte charge	76
3.23 Zoom des déplacements du minimum du segment au cours du temps pour la surface L1 à forte charge	77
3.24 Représentation des frottements du segment au cours du temps pour la surface L1 à forte charge	77
3.25 Zoom des frottements du segment au cours du temps pour la surface L1 à forte charge	78
3.26 Forces de frottement sans considérer les forces de frottement de Couette pour L1 à forte charge	78
3.27 Frottement total au cours du temps pour la surface L3 à faible charge à masse réelle	80
3.28 Frottement total au cours du temps pour la surface L3 à faible charge à masse multipliée par 10	80
3.29 Frottement total au cours du temps pour la surface L3 à faible charge à une masse multipliée par 100	81
3.30 Position du segment au cours du temps à faible charge pour la surface L3	81
3.31 Zoom de la position du segment au cours du temps à faible charge pour la surface L3	82

3.32	Frottements et déplacements pour une surface lisse pour un choix de sigma $\sigma = \sigma_{L3} = 0.034\mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 13\,333N.m^{-1}$	83
3.33	Frottements et déplacements pour une surface lisse pour un choix de sigma $\sigma = \sigma_{L3} = 0.034\mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 4\,000N.m^{-1}$	83
3.34	Frottements et déplacements pour L1 avec $\sigma_{L1} = 0.053\mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 4\,000N.m^{-1}$	84
3.35	Frottement et déplacement pour L3 avec $\sigma_{L3} = 0.034\mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 4\,000N.m^{-1}$	84
3.36	Déplacements pour L1 avec $\sigma_{L1} = 0.053\mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 13\,333N.m^{-1}$	85
3.37	Frottements pour L1 avec $\sigma_{L1} = 0.053\mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 13\,333N.m^{-1}$ pour $\bar{k} = 0.01$ et $\bar{k} = 0.02$ microns	85
3.38	Frottements pour L1 avec $\sigma_{L1} = 0.053\mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 13\,333N.m^{-1}$ pour $\bar{k} = 0.01$, $\bar{k} = 0.02$ et $\bar{k} = 0.05$ microns	85
3.39	Frottements et déplacements pour la surface L1 pour différents σ et pour différents plans moyens H3 pour une forte charge $W_a = 4\,000N.m^{-1}$	87
3.40	Frottements et déplacements pour la surface L3 pour différents σ et pour différents plans moyens H3 pour une forte charge $W_a = 4\,000N.m^{-1}$	88
3.41	Courbes de Stribeck pour différents plan et différentes valeurs de la constante KT pour L1 et L3	90
3.42	Courbes de Stribeck pour L1 et L3 pour différents débits	91
3.43	Comparaison entre les frottements issus des essais et ceux issus de la simulation numérique pour les surfaces L1 et L3 entre les essais et la simulation	91
3.44	Estimation des pressions et de la hauteur d'huile pour la surface L1 pour une charge appliquée $W_a = 13\,333N.m^{-1}$	93
3.45	Estimation des pressions et de la hauteur d'huile pour la surface L3 pour une charge appliquée $W_a = 13\,333N.m^{-1}$	94
3.46	Estimation des pressions et de la hauteur d'huile pour la surface L1 pour une charge appliquée $W_a = 200N.m^{-1}$	95
3.47	Estimation des pressions et de la hauteur d'huile pour la surface L3 pour une charge appliquée $W_a = 200N.m^{-1}$	96
3.48	Comparaison du temps de résolution pour le même programme pour les deux compilateurs (ICPC et G++) avec l'option -O3 à faible charge ($200N.m^{-1}$)	97
3.49	Temps de résolution pour L3 à forte charge ($13\,333N.m^{-1}$) pour un maillage de 800×300 et un pas de temps de $\frac{1}{80000}$	98

TABLE DES FIGURES

4.1	Représentation du domaine Ω et des différentes zones	100
4.2	Représentation de la trajectoire de $\beta(t)$ au cours du temps et de la ligne caractéristique à $t = 0$	104
4.3	Problème de la détermination de $\Theta(\beta(t), t)$ dans le cas rupture	104
4.4	Représentation de $F(x)$ et $\Theta(x, t)$ en fonction de $x = \beta^+$	105
4.5	Représentation de $\tilde{\alpha}$	113
4.6	Représentation du domaine A et de ces frontières	113
4.7	Illustration des différents cas où l'isocline existe	114
4.8	Illustration des différents cas selon la condition au bord du débit η	119
5.1	Représentation de la zone de pression positive A_1 pour la géométrie h donnée	122
5.2	Représentation de la pression P et de θ pour le modèle $(P - \theta)$ ($a = \frac{1}{2}$) pour un débit imposé $\theta(0, t)h(0) = 1.08$	123
5.3	Représentation de la pression P et de θ pour le modèle de Stokes ($a = 1$) pour un débit imposé $\theta(0, t)h(0) = 0.54$	123
5.4	Représentation de la trajectoire de $(\alpha(t), \beta(t))$ au cours du temps pour différentes positions initiales pour $a = 1$ et $\lambda = 0.2$ pour un débit imposé $\theta(0, t)h(0) = 0.54$	124
5.5	Représentation de la trajectoire de $(\alpha(t), \beta(t))$ au cours du temps pour différents pas de temps Δt , une même position initiale de $(\alpha(0), \beta(0)) = (0.26, 0.64) \in A_1$ pour $a = 1$, $\lambda = 0.2$, pour un débit imposé $\theta(0, t)h(0) = 0.54$	125
5.6	Représentation de la hauteur de film d'huile et de Θ au cours du temps pour le nouveau modèle avec $\lambda = 0.5$ et $\lambda = 0$, et pour le modèle d'Elrod-Adams, pour une même position initiale de $(\alpha(0), \beta(0)) = (0.05, 0.53) \in A_1$ pour $a = 1$, pour un débit imposé $\Theta(0, t)h(0) = 0.52126$	126
5.7	Trajectoire de (α, β) au cours du temps pour le modèle $(P - \theta)$ et le nouveau modèle avec $\lambda = 0$ et $\lambda = 0.5$	127
5.8	Trajectoire de α et β au cours du temps pour le modèle $(P - \theta)$ et le nouveau modèle avec $\lambda = 0$ et $\lambda = 0.5$	127

Nomenclature

B	largeur de la surface de la chemise (cm)
C_i	coefficient de Panayi-Schock pour approcher l'intégrale du modèle de Greenwood-Williamson
C_f	critère de fonctionnement (μm)
C_l	critère de lubrification (μm)
C_r	critère de rodage (μm)
EK	étalement de la distribution des rugosités
E'	module d'élasticité (Module de Young) (Pa)
f	force de frottement (N)
F	force (N)
h	distance entre la chemise et le piston ou les segments (μm)
KT	constante totale de Greenwood-Williamson (Pa)
K_{GW}	constante arbitraire de Greenwood-Williamson (Pa)
L	longueur de la surface de la chemise (cm)
m	masse (kg)
m_i	moment d'ordre i des rugosités (μm)
\vec{n}	normale extérieure
N_x, N_y	nombre de points de maillage dans la direction X et Y
N_{ix}, N_{iy}	nombre de points de maillage de l'échantillon de base dans la direction X et Y
P	pression hydrodynamique (Pa)
q_n	vitesse de déplacement de la frontière Σ projeté sur la normale extérieure
Q	débit du fluide (débit par unité de longueur)
Q_+	débit du fluide dans la zone pressurisée (débit par unité de longueur)
Q_0	débit du fluide dans la zone cavité (débit par unité de longueur)
R_a	moyenne arithmétique du profil (μm)
R_k	dimension du noyau du profil (μm)
R_q	écart type du profil (μm)
R_{pk}	dimension des pics du profil (μm)
R_{pq}	moyenne quadratique des rugosité de plateaux (μm)
R_{RMS}	moyenne quadratique des rugosités (μm)
R_{sk}	coefficient de prédominance des pics ou des creux (μm)
R_{vk}	dimension des creux du profil (μm)
S_1	échantillon de surface mesurée de la chemise
S'_1	surface de référence pour le recouvrement issu de la surface S_1

t	temps en (s)
\vec{u}_i	vecteur vitesse
u_n	vitesse relative des parois projetée sur la normale extérieure de Σ
U_i	composantes du vecteur vitesse \vec{u}_i (m/s)
W	charge linéique ($N.m^{-1}$)
Z	hauteur (μm)
β	rayon moyen des pics des rugosités (μm)
ε_{ij}	tenseur des déformations
η	densité des pics des rugosités (mm^{-2})
μ	viscosité du lubrifiant (Pa.s)
μ_s	coefficient de frottement solide-solide
Δt	pas de temps (s)
Δx	pas d'espace dans le sens du déplacement (cm)
Δy	pas d'espace dans le sens perpendiculaire au déplacement (cm)
$\vec{\gamma}$	accélération du segment ($m.s^{-2}$)
λ, Λ	sévérité de contact
ρ	densité du fluide (kg/m^3)
\Re	nombre de Reynolds
σ	moyenne des distributions des hauteurs autour d'un plan moyen d (μm)
σ_{pq}	moyenne quadratique des distributions des hauteurs de plateaux autour d'un plan moyen (μm)
σ_{ij}	tenseur des contraintes
Ω	surface sur laquelle les équations de l'hydrodynamique et de contact sont résolues
Ω_0	la zone cavité
Ω^+	la zone pressurisée, zone active
Σ	frontière entre la zone de cavité et la zone pressurisée
τ_{xy}	contrainte de cisaillement (Pa)

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

La société actuelle est confrontée à des problèmes environnementaux importants. Pour réussir à stabiliser, voire à améliorer la situation, les principaux gouvernements des pays riches et quelques autres sont arrivés à un accord [C.C94], pour mettre en place des seuils en matière de rejet de substances dans l'atmosphère. Ces seuils baisseront au cours du temps, sur la base d'une estimation des gains que peuvent nous apporter les améliorations technologiques. Ces restrictions s'appliquent notamment au deuxième vecteur de production de gaz à effet de serre, l'automobile.[[ade10]]

Un des moyens pour respecter ces contraintes, est d'augmenter les performances mécaniques du moteur, en réduisant notamment les pertes par frottements.

Voici quelques moyens préconisés par la norme antipollution EURO :

- diminuer le poids des véhicules
- augmenter les performances des moteurs
- améliorer l'aérodynamisme des véhicules
- développer des véhicules qui ne rejettent aucune particule (véhicule électrique, à hydrogène, ...)

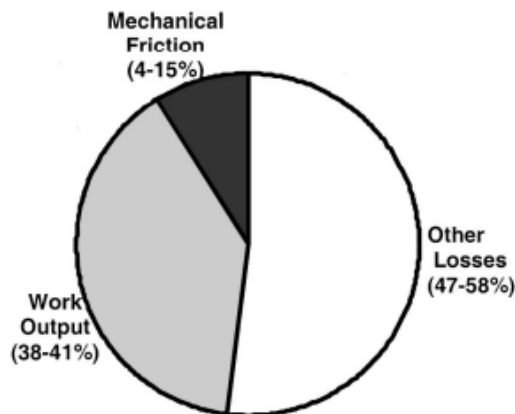


Fig. 1 Distribution of total energy in a fired engine

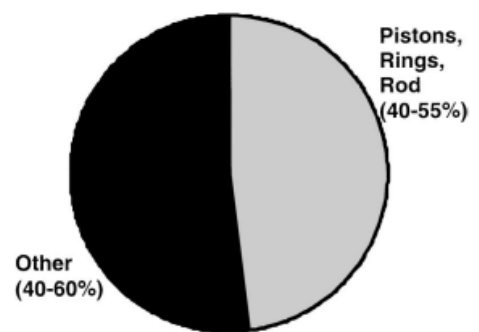


Fig. 2 Distribution of the total engine mechanical friction

FIGURE 1.1 – Estimation des frottements du moteurs [Ric00]

De nombreuses études ont été menées pour estimer les pertes par frottement d'un véhicule [TPZ11], [Via], [Ric00], [Tay98]. Ces dernières s'accordent sur le fait que l'on a, environ 15 % de pertes par frottement mécanique. Dans ces 15 %, l'ensemble Piston/ Segment/ Chemise/ Bielle représentent 40% à 55% de ces frottements, c'est donc sur cette zone que devront porter les efforts pour en réduire la part.

Les gouvernements, par des mises en place de primes, permettent un renouvellement du parc de voitures plus rapide, les nouvelles solutions proposées auront donc un effet rapide sur l'environnement.

Parc de voitures particulières (milliers)

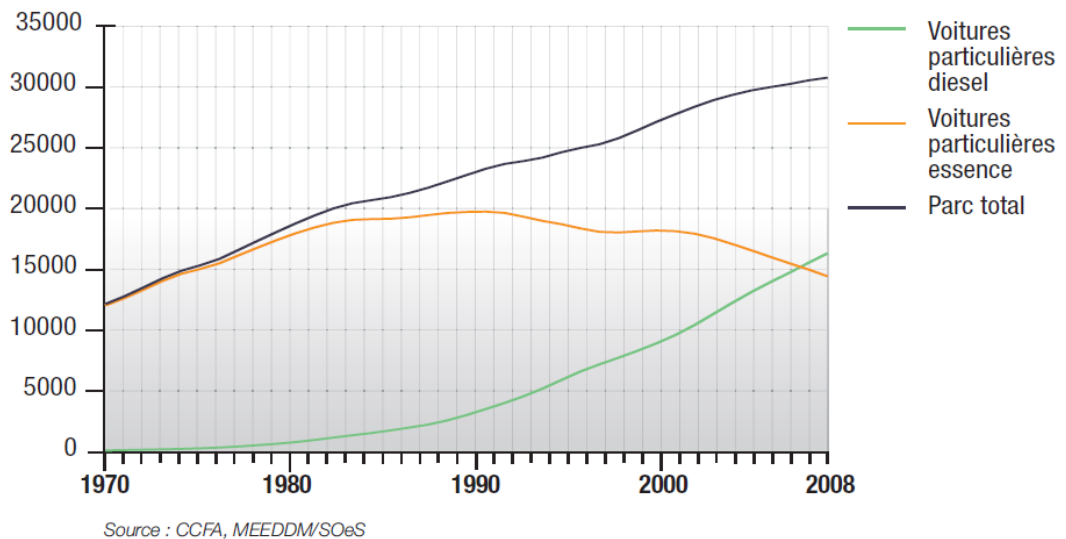


FIGURE 1.2 – Nombre de véhicules particuliers en France entre 1970 et 2008

L'amélioration technologique du moteur aura aussi un effet sur la quantité de gaz polluants rejetés dans l'atmosphère. L'Union Européenne, ainsi que les Nations Unies, ont lancé des programmes comme le programme Euro I,..., Euro VI, pour l'Europe, et le protocole de Kyoto pour le monde. Les programmes dont l'historique d'apparition est donné dans le tableau 1.1 ont imposé des valeurs limites d'émission de gaz (tableau 1.2) en surtaxant les constructeurs en cas de non respect.

On peut souligner que les objectifs d'atteindre les $95g/km$ de CO_2 n'étant pas réalisables à court terme, l'échéance initiale a été reportée à 2020.

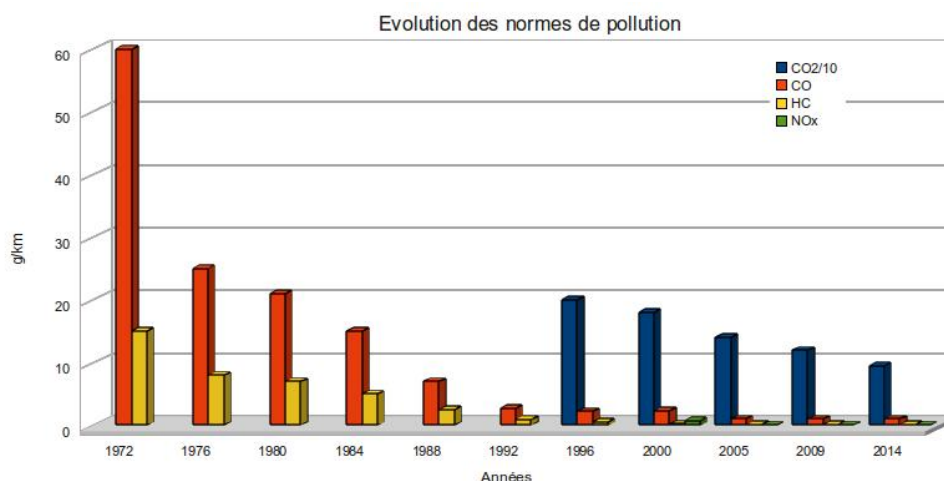


FIGURE 1.3 – Évolution des taux limites de rejet de polluant pour les voitures neuves à essence [44309]

Normes	Euro I	Euro II	Euro III	Euro IV	Euro V	Euro VI
Date d'application	1993	1996	2000	2005	2009	2014

TABLE 1.1 – Historique d'apparition des normes EURO

g/km	1972	1976	1980	1984	1988	1992	1996	2000	2005	2009	2014
CO ₂							200	180	140	120	95
CO	60	25	21	15	7	2.72	2.2	2.3	1	1	1
HC	15	8	7	5	2.5	0.97	0.5	0.2	0.1	0.1	0.1
NO _x								0.75	0.08	0.06	0.06

TABLE 1.2 – Taux des différentes matières polluantes autorisées par l'union européenne en fonction de l'année

Nos recherches portent sur l'ensemble piston segment chemise, où l'on pense qu'une amélioration de quelques pour-cent est possible. Cette amélioration aurait ainsi un impact immédiat sur la consommation du véhicule et les émissions de polluants.

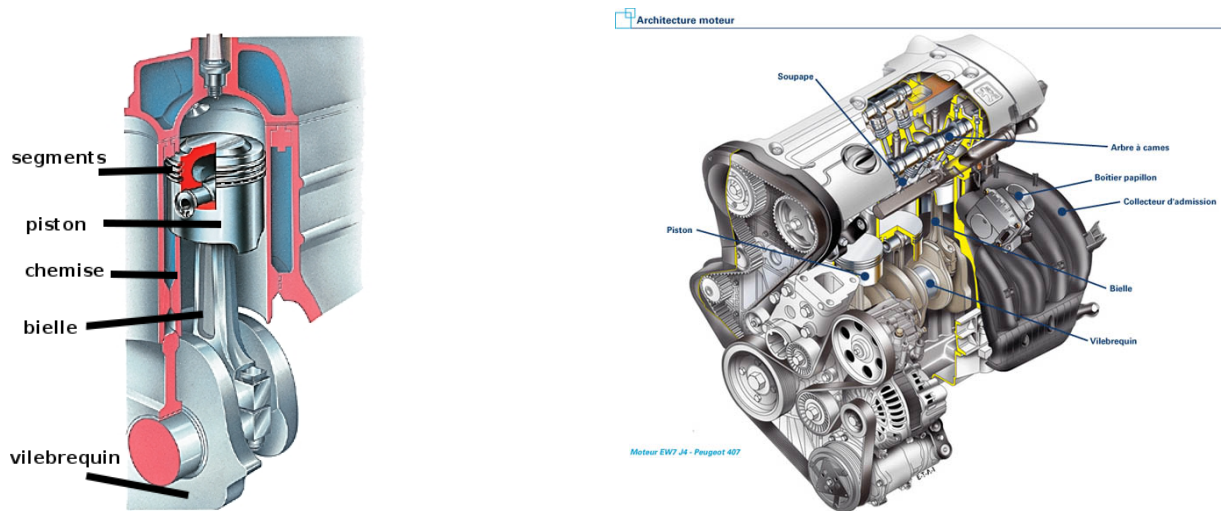
1.1 Le fonctionnement du moteur

Les moteurs automobiles actuels sont presque tous des moteurs à 4 temps, c'est-à-dire que leur cycle de fonctionnement se décompose sur 2 tours. Le mouvement du piston est piloté par la cinématique de la bielle articulée sur les manivelles du vilebrequin, et guidé dans le cylindre.

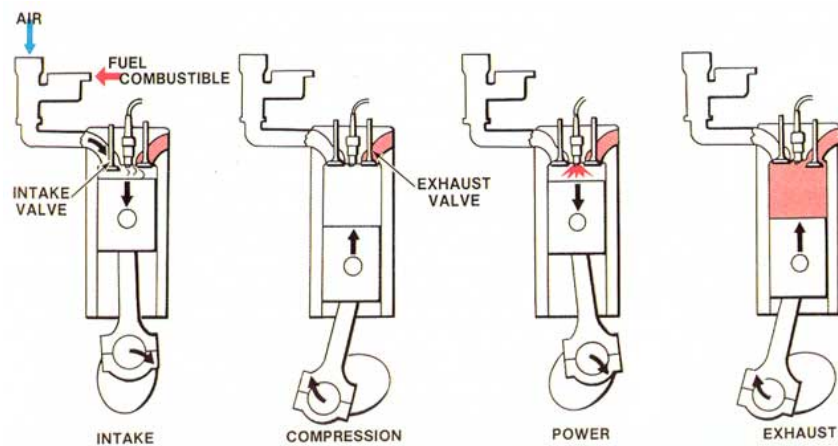
Le cycle se décrit ainsi :

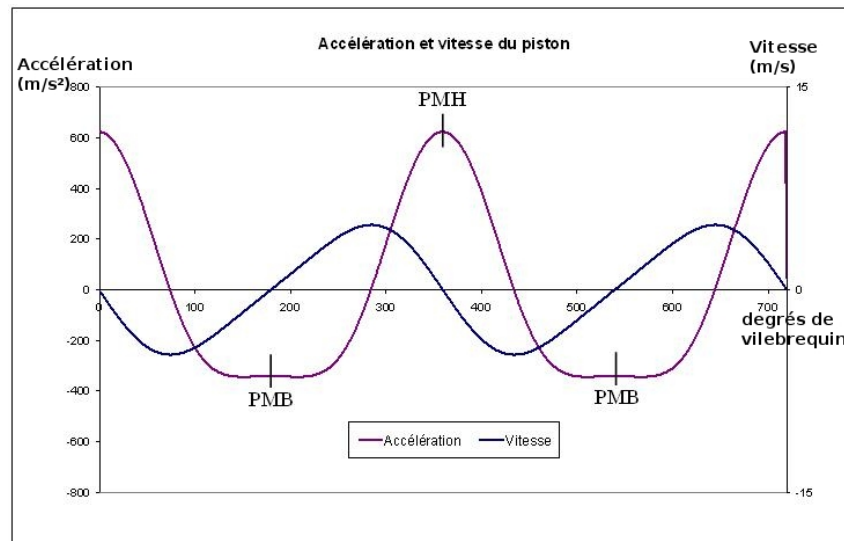
- arrivée d'air : **admission**
- **compression**
- explosion, **détente**

1.1. LE FONCTIONNEMENT DU MOTEUR



– échappement





À chaque étape du cycle, le piston parcourt verticalement la chemise, ce qui se traduit par une rotation de 180° du vilebrequin. Les deux extrémités de ce trajet se nomment le point mort haut (PMH) et le point mort bas (PMB). C'est à proximité de ces points que les frottements sont les plus importants en raison de la faible vitesse de déplacement du piston, la portance du segment étant alors essentiellement assurée par le contact des aspérités et non plus par le lubrifiant.

1.2 Procédés de fabrication et rugosité

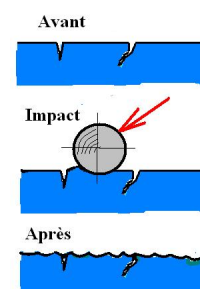
La rugosité est le résultat d'un processus complexe car elle apparaît sous une forme ou une autre (micro-géométrie, texturation,...) tout au long du processus de fabrication et de la vie des éléments du moteur. Nous allons décrire rapidement ces étapes en développant pour chacune d'elles ce qui concerne la rugosité.

1.2.1 Procédés d'abrasion et de déformation plastique (de l'état 0 à l'état 1)

De nombreuses pièces des moteurs sont issues de l'industrie métallurgique. À leur livraison au constructeur automobile, les surfaces de celles-ci peuvent posséder une grande variabilité. On notera l'état "0", l'état initial de cette surface. L'abrasion ou le galeage vont permettre un premier traitement de cette surface en l'amenant à un état noté "1". Voici 3 types d'abrasion possibles :

– **Grenaillage :**

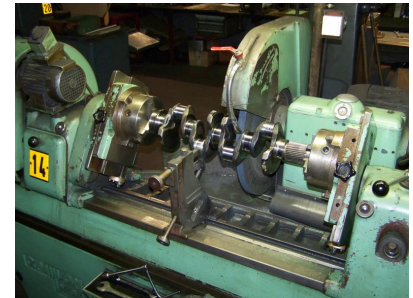
il s'agit d'un polissage à l'aide de micro-billes ou de sable qui est projeté contre la surface à traiter



1.2. PROCÉDÉS DE FABRICATION ET RUGOSITÉ

– Rectification :

Ce procédé consiste à frotter l'un contre l'autre deux corps cristallins. Les machines à rectifier permettent d'obtenir des tolérances très faibles. Le plus souvent, un disque comprenant un abrasif est entraîné en rotation et appliqué sur la surface à rectifier.



– Galetage :

En appliquant un effort sur un galet en contact sur la surface à traiter, des déformations plastiques sont appliquées localement générant une géométrie spécifique ainsi que des contraintes résiduelles.



Les rugosités sont alors maîtrisées jusqu'à un ordre de grandeur de $0.5\mu\text{m}$ [Val05b].

À partir de cet état de surface "1", on cherchera à introduire une "texturation" qui va permettre de créer une rugosité plus "précise" (du type vallée-plateau) à certains endroits de la surface.

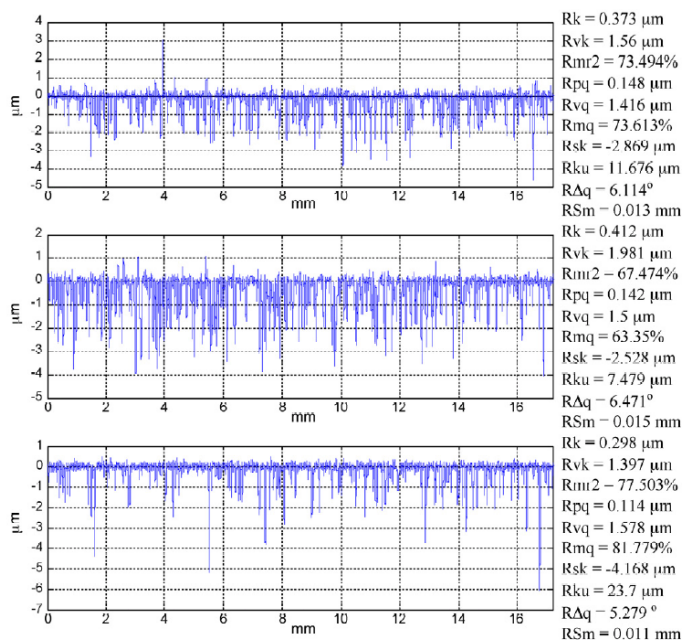


Fig. 8. Cylinder liner roughness profiles and parameters obtained for $p_v = 6.1\text{ MPa}$ and $t = 32\text{ s}$.

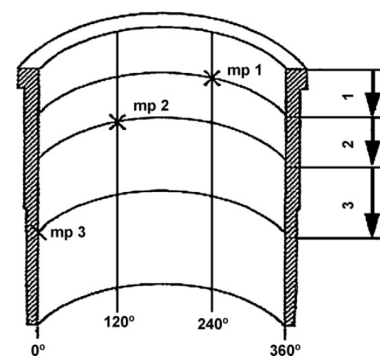


Fig. 2. Places of cylinder liner roughness profiles measurement (mp1, mp2 and mp3).

profils de rugosités après abrasion pris au PMH, au milieu et au PMB de la chemise.[PCM09]

1.3 Méthode de texturation (de l'état 1 à l'état 2)

Nous allons présenter les principales techniques de texturation. Les avancées actuelles permettent d'obtenir des texturations contrôlées au micron près. (état "2")

1.3.1 Procédé de microtexture à l'aide d'un diamant

Dans l'usinage au diamant, il existe 3 paramètres qui permettent de contrôler la texture :

- la vitesse de rotation du rodoir,
- la vitesse de déplacement vertical,
- la vitesse d'abrasion des diamants.

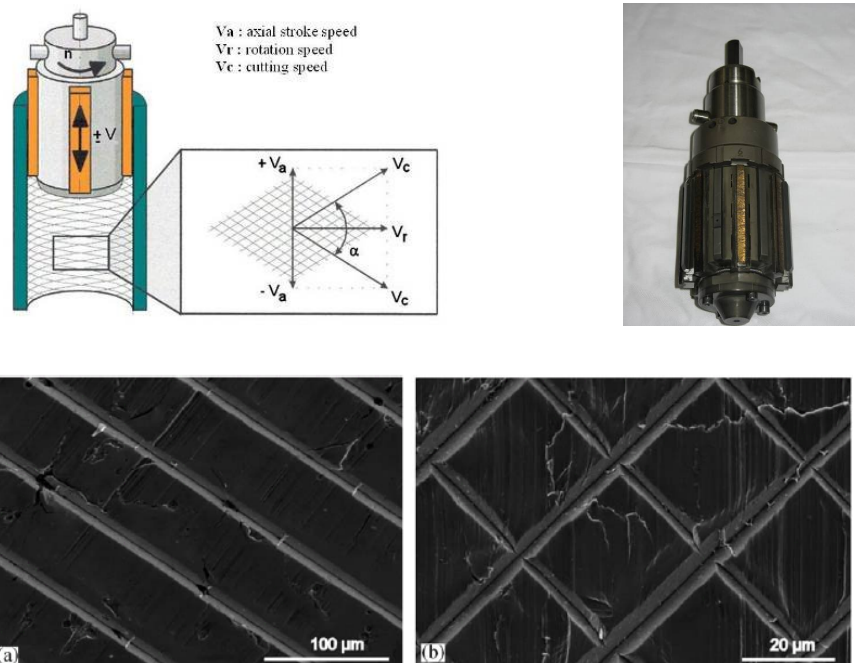


FIGURE 1.5 – exemple de surface obtenue avec un diamant [PJ07]

Ce procédé est rapide, et peu coûteux, facile à mettre en place sur les chaînes de production qui possèdent déjà des outils d'abrasion semblables.

1.3.2 Les procédés chimiques de création de textures

Une fois la phase d'abrasion terminée, des films protecteurs sont posés sur la surface de la pièce. Ces films sont munis de trous, par lesquels l'acide va s'infiltrer pour venir attaquer la paroi de la pièce. La dose d'acide et le temps laissé avant de rincer la surface sont fonction de la profondeur de la texture souhaitée.

1.3. MÉTHODE DE TEXTURATION (DE L'ÉTAT 1 À L'ÉTAT 2)

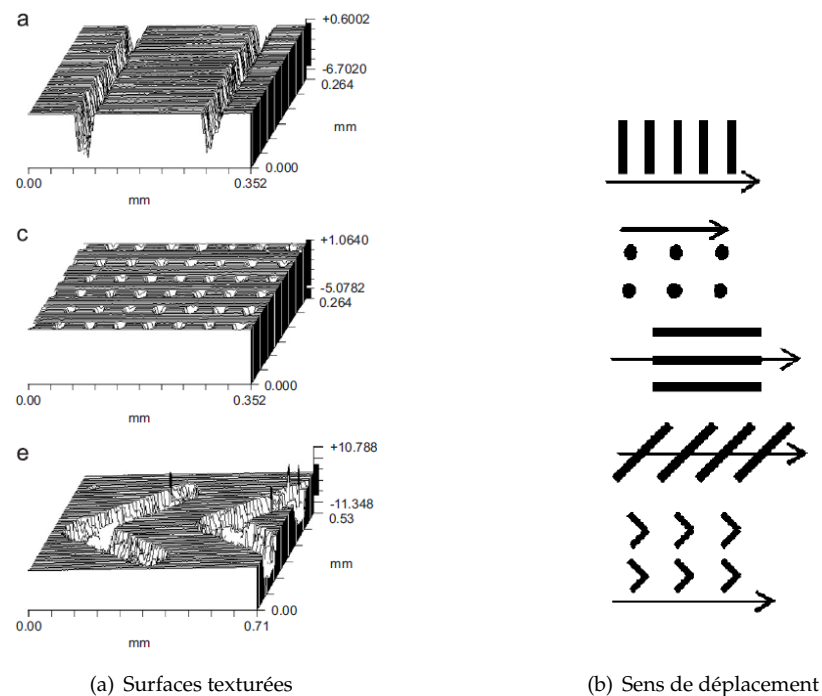


FIGURE 1.6 – Exemple de textures à l'acide[CH07]

Cette technique demande trop de temps pour être mis en place sur des chaînes de production. Elle a l'avantage de ne pas entraîner de déformation du matériau autour de la texture, de ne pas générer de débris pouvant subsister dans le contact. Enfin la rugosité de plateau est inchangée.

1.3.3 Laser et microstructure

La technologie du laser est en constante amélioration. Au début des années 1990, le laser formait autour des trous de hautes aspérités ce n'est plus le cas avec des lasers actuellement utilisées. Cette technique permet de former des trous de la taille et de la profondeur souhaitée. La finesse des lasers permet de faire des textures sur des pièces de plus petite taille comme les segments par exemple.

Ce type de texturation est facile à mettre en œuvre, mais reste coûteux à l'achat, ce qui implique de réserver son utilisation à des zones localisées. Réaliser des textures au laser sur toute la chemise d'un moteur demanderait beaucoup trop de temps.

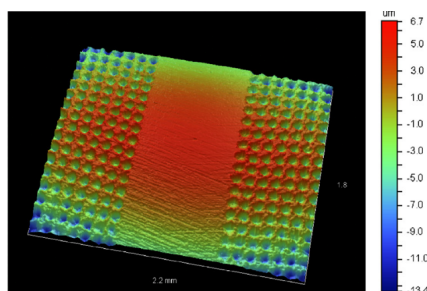


FIGURE 1.7 – Exemple de texturation au laser [ES09]

Conclusion.

Le laser et le diamant permettent une bonne finition au niveau de la réalisation de la chemise. La taille de la texture intervient aussi dans le choix du procédé de fabrication [Edg11]. Pour le diamant lors de l'abrasion, la surface s'en trouve légèrement modifiée. Les rugosités de plateaux sont alors aussi perturbées. Les techniques chimiques pour les microgéométries sont très lourdes à mettre en place, car il faut isoler toutes les parties qui ne seront pas attaquées par l'acide. Les constructeurs automobiles envisagent donc d'abord l'optimisation de la fabrication du moteur par la technique au diamant qui est déjà en place sur les lignes de production, puis dans un avenir proche, par l'utilisation de texture au laser lorsque les gains en terme de frottement et de consommation d'huile seront prouvés.

1.4 L'usure et sa modélisation (de l'état 2 à l'état 3)

L'usure apparaît naturellement lors du fonctionnement de longue durée d'un système mécanique comme l'ensemble piston/ segment /chemise.

Elle peut être classée en 6 familles principales selon les différents mécanismes physiques qui la provoquent [Val05a] :

- usure adhésive,
- usure abrasive,
- usure érosive,
- usure par déformation,
- usure par fatigue de contact,
- usure tribochimique (tribocorrosion)

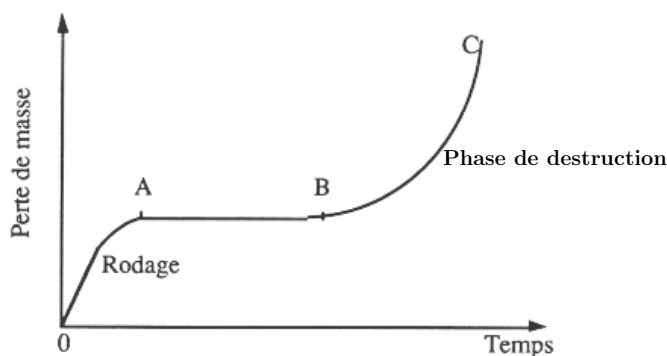


FIGURE 1.8 – Représentation de la vie d'un moteur

1.4. L'USURE ET SA MODÉLISATION (DE L'ÉTAT 2 À L'ÉTAT 3)

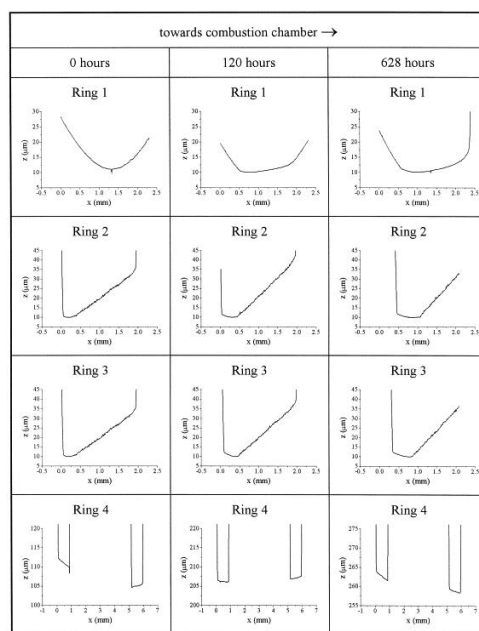
L'usure est très présente dans la vie d'un moteur. On peut résumer l'historique de l'usure pour un mécanisme par l'estimation de la perte de masse au cours du temps qui permet de distinguer 3 phases (figure 1.8) : rodage [O;A], fonctionnement [A;B], détérioration [B;C].

Peu de travaux permettant d'obtenir l'évolution de l'usure au cours du temps existent. On utilise communément la loi d'Archard (1.1) qui permet d'estimer la perte de masse (ou de volume).

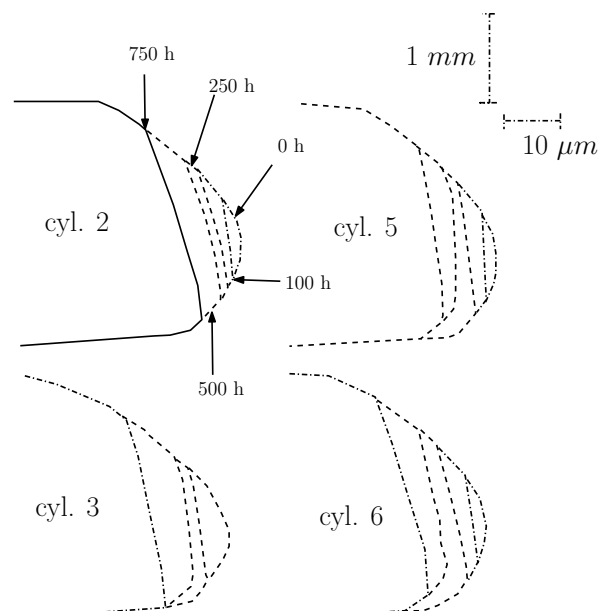
$$U = kWL \quad (1.1)$$

U : Volume usé L : distance parcourue k : le taux d'usure

W : la charge



(a) Usure des 3 segments[PDT99]



(b) profil 1er segment [TN01]

FIGURE 1.9 – Présentation de différents cas d'usure

Une des conséquences de cette usure est la présence de particules dans le lubrifiant. Ces particules vont entraîner une usure abrasive plus rapide des surfaces.

En pratique, on peut travailler avec des géométries de pièces neuves ou usées. Ces dernières peuvent être obtenues expérimentalement (figure 1.9) ou déduites des géométries de pièces neuves en leur imposant une usure a priori. Watanabe *et al.* [WiNH⁺00] choisissent de considérer l'usure maximale de $1.5\mu m$ pour les aspérités des coussinets de palier.

Pour prendre en compte l'usure de la chemise, nous travaillons sur des surfaces dites rodées et des surfaces neuves, dont l'état de surface a été mesuré par Renault (figure 1.10).

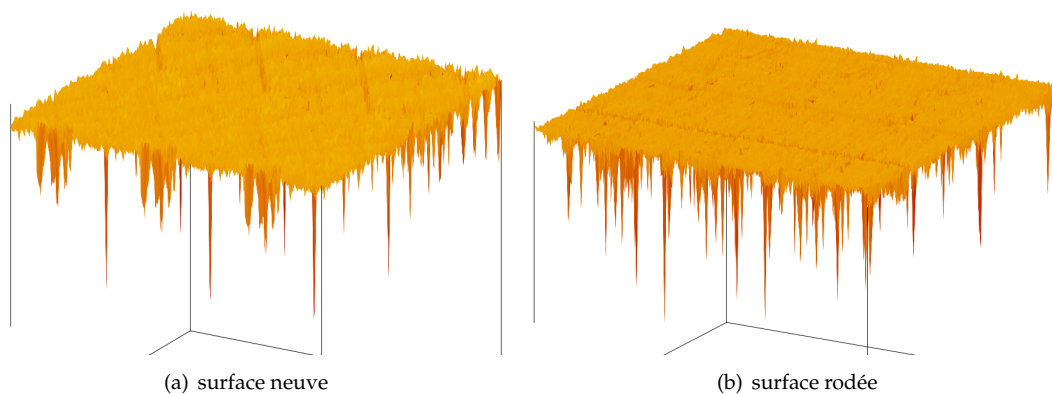


FIGURE 1.10 – Surfaces fournies par Renault

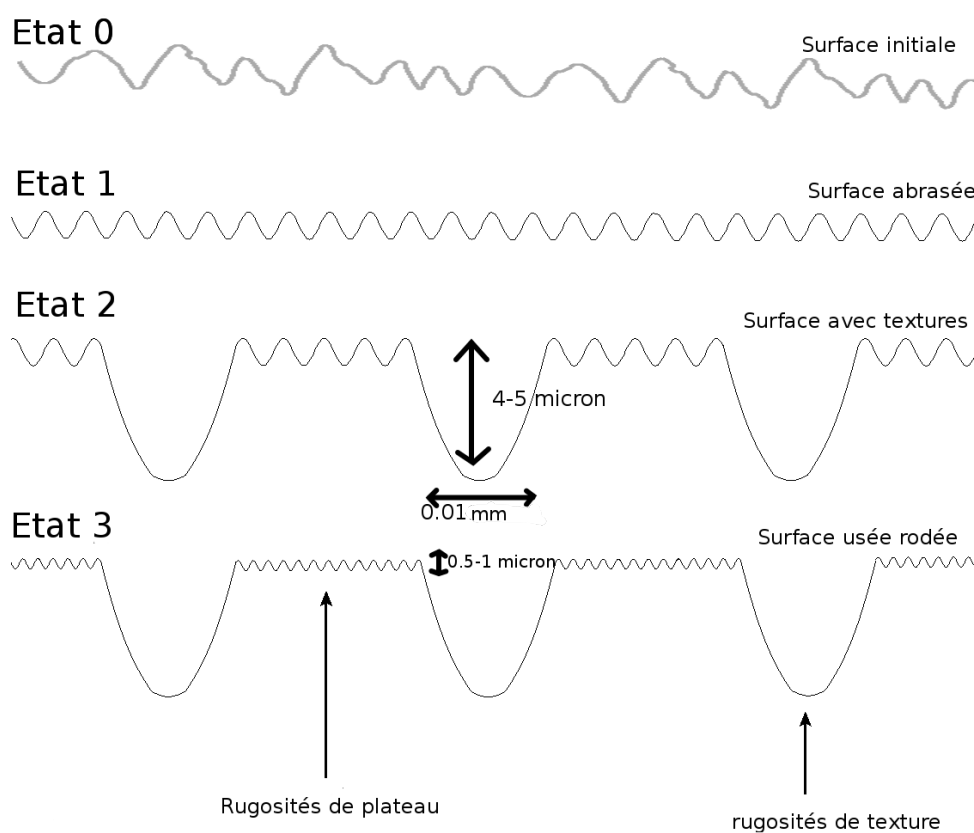


FIGURE 1.11 – Évolution de l'état de surface

1.5. MESURE DES RUGOSITÉS ET PARAMÈTRES DE RUGOSITÉS

Nous avons représenté sur un schéma 1.11 les différents états d'une surface, ainsi que les dimensions des rugosités au cours de la fabrication et de son fonctionnement.

1.5 Mesure des rugosités et paramètres de rugosités

Des outils statistiques sont utilisés sur les surfaces mesurées à la fois pour contrôler la qualité de la pièce aux différents stades de sa fabrication, mais aussi pour obtenir des informations qui seront utilisées dans les outils de simulation visant à déterminer les performances des pièces.

La première étape est de mesurer la surface, nous disposons pour cela de différents procédés :

- soit optique (grande précision, rapide) mais la surface doit être plane,
- soit tactile (plus lent que l'optique, déforme légèrement la surface lors de la mesure, convient à tout type de surface)

Une fois la pièce mesurée "points par points", il faut la représenter. Or la surface réelle apparaît lisse à l'œil nu car les rugosités sont petites par rapport aux dimensions totales de la pièce. Nous utilisons l'anamorphose pour la représenter.

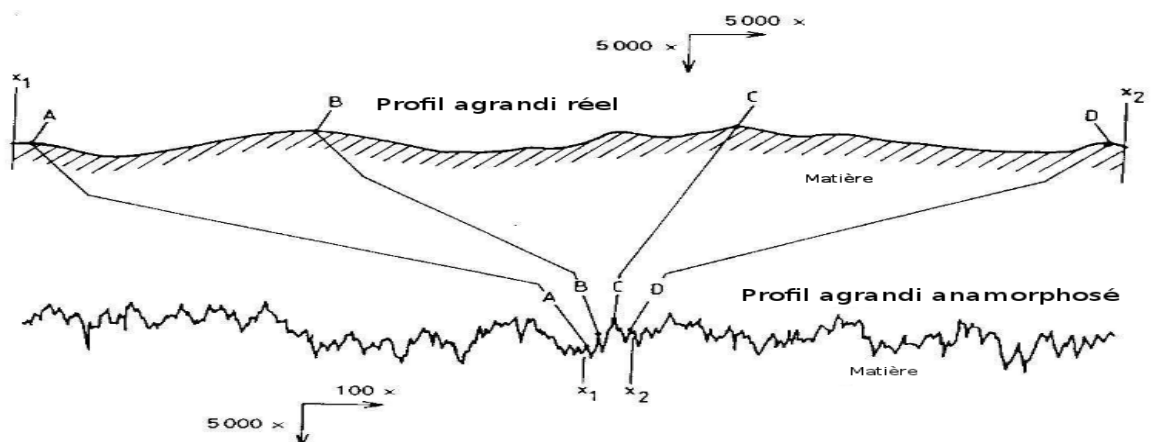


FIGURE 1.12 – Anamorphose d'état de surface

Cette technique consiste à modifier les échelles d'une représentation graphique afin de mieux faire apparaître les rugosités (figure 1.12).

Les caractéristiques géométriques d'une surface sont calculées à partir de la géométrie mesurée (profil anamorphé) ou à l'aide de la courbe d'Abbott [CCB04][fig 1.13].

Cette dernière s'obtient de la manière suivante :

En partant du sommet des aspérités horizontalement et en descendant, on détermine le pourcentage de matière "découpée", jusqu'à atteindre 100% au fond de la rugosité la plus profonde.

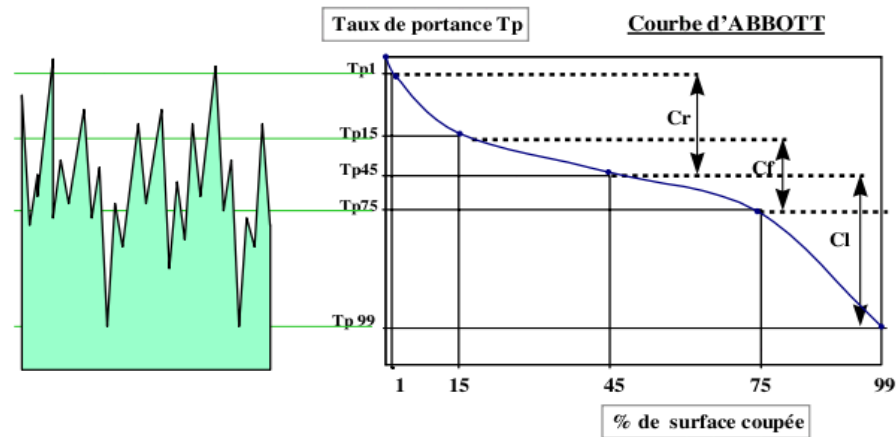


FIGURE 1.13 – Courbe d'Abbott

Il existe des centaines de paramètres de rugosités :

- Certains sont utilisés pour calculer la conformité de l'usinage (critère de rodage C_r , critère de fonctionnement C_f , critère de lubrification C_l) (figure 1.13).
- D'autres apparaissent dans le modèle de contact et sont issus de normes (ISO 13565, ISO 4287, ISO 25178) (R_a moyenne arithmétique des hauteurs du profil, R_q écart type des hauteurs, R_{sk} coefficient indiquant la prédominance des pics ou des creux par rapport à la ligne moyenne, EK étalement de la distribution des hauteurs, ..., R_{RMS} , β , η , R_{pq} , R_{pk} , ...).

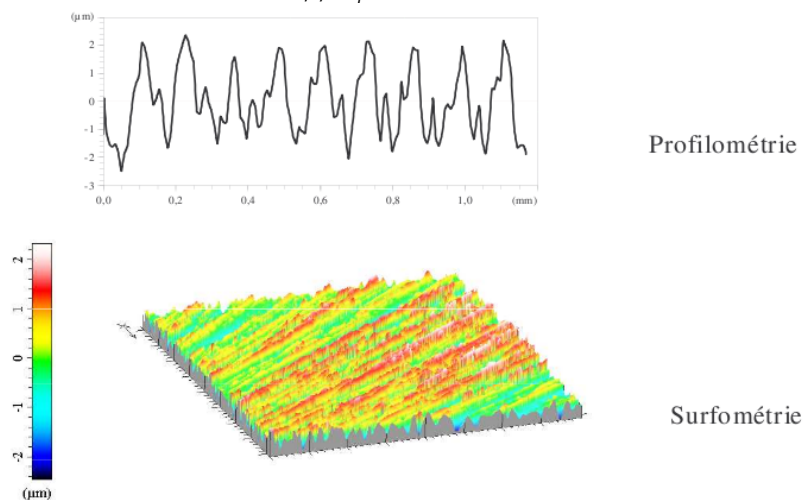


FIGURE 1.14 – Profil d'une surface permettant de calculer les paramètres statistiques

Par exemple pour un moteur d'automobile, les préconisations actuelles de fabrication sont par exemple exprimées comme suit : $0.5 \leq C_r \leq 1.3 \mu m$, $0 \leq C_f \leq 1.5 \mu m$, $1.5 \leq C_l \leq 4.5 \mu m$. Des équivalences existent entre les paramètres C_r , C_f , C_l et les paramètres de rugosité définissant la surface dans la norme ISO 13565, R_{pk} , R_k , R_{vk} .

Ces paramètres de rugosité sont utilisés dans les simulations numériques du contact entre surfaces rugueuses. Il faut cependant remarquer que :

- 2 surfaces avec des rugosités différentes peuvent avoir les mêmes paramètres,

1.6. LES AVARIES

- selon le nombre de points pris pour le calcul de ces paramètres, nous pouvons avoir des résultats totalement différents,
- la distinction entre les plateaux ou les vallées peut être différente selon les algorithmes de filtrage utilisés. Cela change les valeurs des paramètres des rugosités.

Dans le modèle de contact que nous présenterons en détail section 1.11, nous utilisons essentiellement les paramètres suivants :

- R_{RMS} : moyenne quadratique des rugosités,
- β : diamètre moyen des pics,
- η : densité des pics,
- R_{pq} : moyenne quadratique des plateaux,
- R_{pk} : paramètre de rugosité de la première pente de la courbe d'Abbott, caractérise les pics et les plateaux.

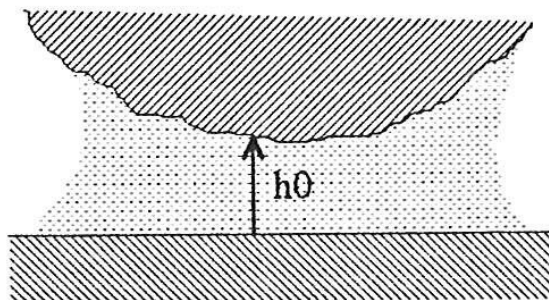
1.6 Les avaries

Le bon fonctionnement d'un système lubrifié peut être perturbé dans un certain nombre de cas qu'il convient d'éviter. L'usure excessive (due aux effet de pression et de glissement tangentiel), les fissures (pression de contact trop élevées) peuvent se combiner avec des effets thermiques et/ou physico-chimiques pour entraîner un grippage qui peut conduire à une destruction du moteur [Fou94](figure 1.15). Le grippage est un phénomène complexe qui fait intervenir beaucoup de facteurs : charge, viscosité, température, rugosité. Il est lié à une rupture du film protecteur qui existe entre les surfaces frottantes. Un des critères de prédiction de l'apparition du grippage est obtenu à partir des coefficients Λ et λ :

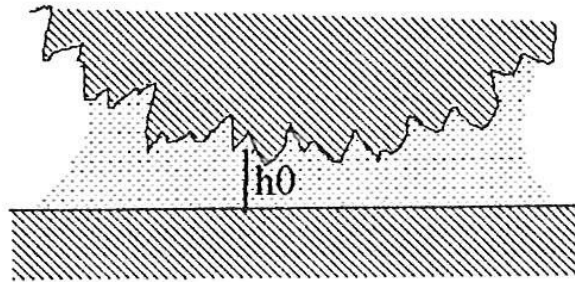
$$\Lambda = \frac{\text{hauteur du film}}{\text{hauteur moyenne des rugosités}}$$

$$\lambda = \frac{\text{hauteur du film}}{\text{moyenne quadratique des rugosités}(\sigma_{RMS})}$$

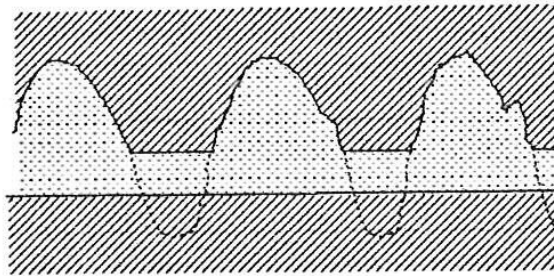
- $\Lambda > 10$ l'influence des rugosités est négligeable : pas de grippage



- $3 < \Lambda < 10$, le grippage est possible mais peu probable, la température élevée due aux contacts entre les aspérités peut favoriser son apparition,
- $1 \leq \Lambda \leq 3$, le grippage est probable sauf si la température est faible (peu de contact entre les aspérités)



- $\Lambda < 1$, grippage quasi-certain. (selon le niveau d'effort et de vitesse)

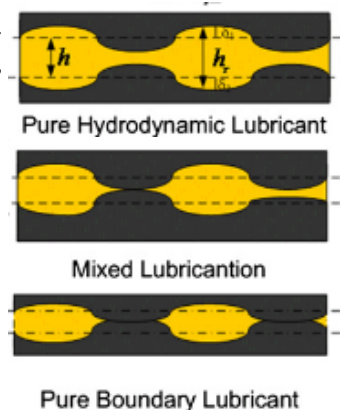


Dans nos modèles visant à modéliser le système piston/ segment/ chemise, nous considérerons une hauteur d'huile en amont supérieure à la hauteur des rugosités pour éviter la rupture du film d'huile dont on sait qu'elle est une des raisons essentielles du grippage.

1.7 Modèle de film d'huile au contact segment/chemise - surface lisse

On considère généralement 3 régimes de lubrification[WCS08] :

- le régime hydrodynamique (la charge n'est supportée que par le lubrifiant), il n'y a pas de contact entre les surfaces. Pour des charges plus fortes, les surfaces peuvent être déformées (régime EHL)
- le régime mixte (la charge est supportée par le lubrifiant et les aspérités)
- le régime limite (elle n'est supportée que par les aspérités)



La courbe de Stribeck(figure 1.16) (1902) exprime le coefficient de frottement par rapport au coefficient $\mu \frac{V}{W}$ (coefficient de Hersey), qui permet de distinguer le régime de fonctionnement du mécanisme.

1.8. APPROXIMATION FILM MINCE (LUBRIFICATION)

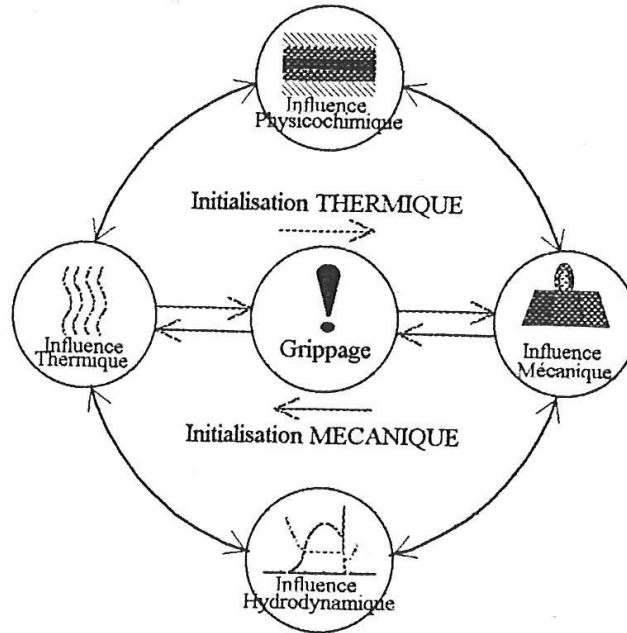


FIGURE 1.15 – Schématisation du grippage d'un contact lubrifié[Fou94]

1.8 Approximation film mince (lubrification)

Un contact lubrifié peut être vu comme un système de deux parois proches séparées par une zone où se trouve de l'air et/ou de l'huile.

La paroi supérieure se déplace avec une vitesse U_2 et la paroi inférieure avec une vitesse U_1 . h représente la distance entre les deux parois, supposée toujours strictement positive (les parois ne se touchent pas). Reynolds en 1886 [Rey86] proposa une équation qui permet de connaître la pression hydrodynamique dans un tel contact :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{(u_1 + u_2)h}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{(v_1 + v_2)h}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (h) \quad (1.2)$$

avec :

- μ la viscosité
- $h(x, y)$ la hauteur entre les 2 surfaces
- $\vec{u}_1 = (U_1, U_2)$ et $\vec{u}_2 = (W_1, W_2)$ les composantes respectives des vitesses de chacune des surfaces suivant les directions x_1 et x_2 , $\vec{u}_3 = (V_1, V_2)$ est supposé nulle suivant x_3

Cette équation a pour origine les lois de la mécanique suivantes :

-Loi de la continuité des masses : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0$

-Loi fondamentale de la dynamique : $\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$

-Loi constitutive du comportement de l'écoulement des fluides, pour un fluide newtonien : $\sigma_{ij} = (-p + \lambda \theta) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$

avec

θ le taux de dilatation volumique, ε le tenseur des déformations, λ et μ sont des coefficients de viscosité

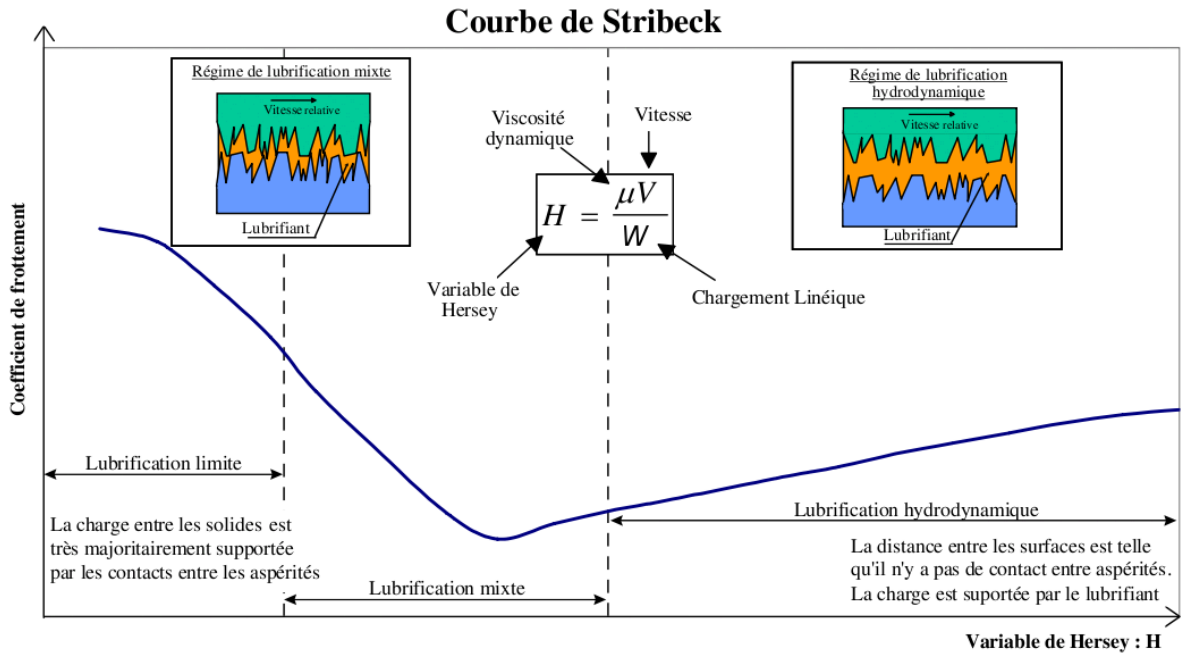


FIGURE 1.16 – Courbe de Stribeck

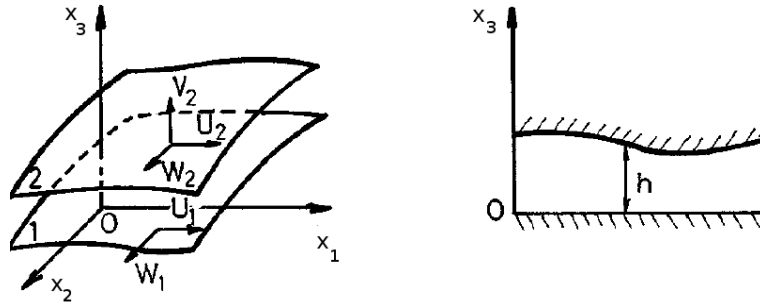


FIGURE 1.17 – Système d'axe en coordonnées cartésiennes [FRD90]

(dans le cas de fluide incompressible $\lambda = 0$)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

-Loi de conservation de l'énergie :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \alpha T \frac{dp}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Pour retrouver l'équation (1.2), on combine la loi fondamentale de la dynamique et la loi de comportement de l'écoulement des fluides :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((-p + \lambda \theta) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \right)$$

1.8. APPROXIMATION FILM MINCE (LUBRIFICATION)

Supposons les forces f_i négligeables, on obtient l'équation de Navier Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \right) \quad (1.3)$$

On adimensionne les variables, en posant :

$$\varepsilon = \frac{H}{L}, \mathfrak{R} = \rho_0 \frac{VH}{\mu_0}, \bar{p} = p \frac{H^2}{\mu_0 V L}, \bar{u}_1 = \frac{u_1}{V}, \bar{u}_2 = \frac{u_2}{V}, \bar{u}_3 = \frac{u_3}{V} \frac{L}{H}, \bar{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \bar{x}_2 = \frac{x_2}{L}, \bar{x}_3 = \frac{x_3}{H}, \bar{t} = \frac{tV}{L}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

On obtient la même équation pour $i=1,2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} = & \varepsilon \left[-\mathfrak{R} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon (\bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2^2} \right) \right] + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_3^2} \\ & + \varepsilon^2 \left[\frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_i} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \right) \right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_3} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_i} \right) \end{aligned}$$

pour $i=3$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_3} = & \varepsilon^2 \left\{ \varepsilon \left[-\mathfrak{R} \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2^2} \right) \right] + (\bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3^2} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1} \right) \right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Nous négligeons alors les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en ε . On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} = -\varepsilon \mathfrak{R} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} \right) + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} & \text{pour } i=1,2 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_3} = 0 \end{cases}$$

Ensuite en négligeant les forces d'inertie ($\varepsilon \mathfrak{R} \ll 1$) devant les termes de viscosité, puis en repassant en variable avec dimension, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

En intégrant les deux premières équations et en tenant compte des conditions aux limites sur les vitesses u_1 et u_2 , on peut exprimer u_1 et u_2 , en fonction de la pression.

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} x_2^2 + b x_2 + c \right) \\ u_2 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} x_1^2 + d x_1 + e \right) \end{cases}$$

Avec b, c, d, e des constantes qui s'expriment en fonction de U_1, U_2, W_1, W_2 et h .

On introduit alors ces expressions dans la 3ème équation et après quelques transformations mathématiques, on obtient l'équation de Reynolds (1.2).

Ce modèle de Reynolds n'est valable que lorsque le fluide remplit totalement l'intervalle entre les deux parois. Que se passe-t-il quand le contact n'est que partiellement lubrifié? Ceci apparait en particulier dans le cas de la cavitation qui est un phénomène se traduisant par l'apparition de bulles ou de filament de gaz dans le fluide. [Swa74]

Il est liée à deux situations possibles [BH63] :

- La première apparait lorsque la pression dans le fluide devient inférieure à la pression de vapeur saturante, le lubrifiant passe alors en partie sous forme gazeuse. (changement de phase)
- La deuxième intervient lorsque la pression dans le fluide est inférieure à la pression ambiante, alors du gaz extérieur peut passer dans le fluide.

Lorsque ce phénomène de cavitation intervient, l'équation de Reynolds n'est plus valable, car nous n'avons plus uniquement du lubrifiant entre les deux parois mais aussi du gaz. Des modèles de cavitation ont donc été développés pour prendre en compte ce phénomène, ils se basent sur la séparation du domaine en deux zones distinctes du plan (xOy) :

- une zone cavitée, que l'on nommera Ω_0 , partiellement remplie de fluide,
- Ω_+ la zone de film plein, où l'on peut appliquer l'équation de Reynolds.

Ces deux zones sont séparées par une frontière libre (Σ) inconnue.

1.9 Les modèles de cavitation

Nous allons présenter les principaux modèles (Dowson et Taylor[DT74]) qui sont utilisés pour modéliser la cavitation dans le cas où la surface inférieure est plane et se déplace avec une vitesse $W_1 = 0$, $U_1 = u$, tandis que la surface supérieure est fixe. Tous les modèles décrits ici sont composés d'équations posées dans le plan $(x_1 \widehat{O} x_2)$, et $\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{pmatrix}$. Par abus de notation, on notera aussi \vec{u} le vecteur $\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$. Leur établissement n'est pas toujours physiquement correctement établi (la pression en sortie dans la partie divergente de la surface peut excessivement négative et dépassée la pression de vapeur saturante,...). On cherche souvent à obtenir des modèles dont la résolution numérique n'est pas trop difficile et qui donnent des résultats cohérents au niveau des principaux paramètres opérationnels (ordre de grandeur de la pression, de la charge...). Cependant la nécessité d'obtenir des résultats de plus en plus précis dans des géométries complexes et des conditions de fonctionnement difficiles conduit à complexifier les modèles classiques.

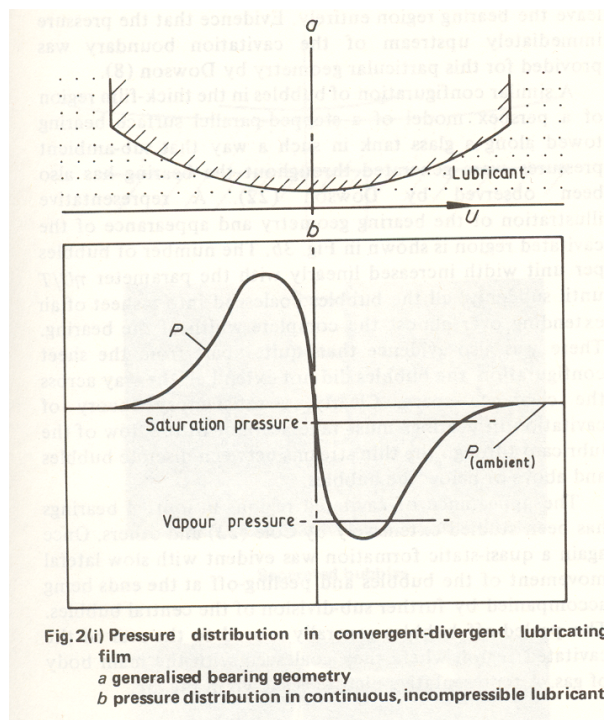


FIGURE 1.18 – en haut : profil général du palier
en bas : distribution de la pression

Dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation de Reynolds peut être interprétée comme une équation de conservation de la masse, pour un champ de vitesse moyen dans le fluide.

Comme nous l'avons signalé cette équation n'est valable que dans une zone où le film est plein. Dans

1.9. LES MODÈLES DE CAVITATION

la plupart des modèles de cavitation, on suppose que la pression dans la zone cavitée est constante et supérieure ou égale à la pression de vapeur saturante du lubrifiant.

1.9.1 Le modèle de Sommerfeld

Ce modèle consiste à appliquer l'équation de Reynolds sans tenir compte de la cavitation. Le problème est bien posé d'un point de vue mathématique.

Des solutions analytiques existent dans certain cas particuliers. Mais comme nous pouvons le voir sur la figure 1.19, les pressions positives sont aussi importantes que les pressions négatives, ce qui physiquement n'est pas cohérent.

1.9.2 Le modèle de Gümbel (demi-Sommerfeld)

L'idée de ce modèle est de tronquer les pressions négatives obtenues avec le modèle précédent.

L'existence et l'unicité sont immédiates. Cependant la solution obtenue est souvent physiquement incohérente en particulier en ce qui concerne le calcul des débits.

1.9.3 Le modèle de Swift-Stieber (Reynolds)

Ce modèle, que l'on appellera souvent dans la littérature mathématique le modèle de Reynolds, a été le modèle le plus étudié mathématiquement, mais son établissement physique est controversé.

Il repose sur "une fausse idée" de la continuité du débit. Le phénomène de cavitation est supposé bidimensionnel, indépendant de z . La pression dans la zone cavitée est supposée constante.

Le débit dans la zone pressurisée :

$$\vec{Q}_+ = -\frac{h^3}{12\mu} \nabla p + \vec{u} \frac{h}{2}$$

Le débit dans la zone cavitée est exprimé par :

$$\vec{Q}_0 = \vec{u} \frac{h}{2}$$

(Ceci impose que la cavité soit remplie de fluide ce qui est contestable)

On a conservation du débit de fluide, donc on obtient la condition sur Σ :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

Ce modèle entraîne une pression plus élevée que dans le modèle précédent.

Avec la méthode de calcul de Christopherson, qui consiste à discrétiser (1.2) par différences finies ou éléments finis puis à appliquer un algorithme itératif type Gauss-Seidel en corrigeant de manière itérative la pression dès qu'elle devient négative, on peut obtenir facilement le champ de pression.

Cryer [Cry71] démontre l'existence et l'unicité d'une solution pour ce modèle pour un palier infiniment

long et justifie mathématiquement la méthode de Christopherson.

Depuis d'autres méthodes numériques ont été proposées pour résoudre ce problème : l'algorithme d'Uzawa, la pénalisation, des méthodes de lignes[Mey81]...

Néanmoins, il s'avère que le modèle pouvait fournir des solutions non satisfaisantes physiquement [DT74] [BC83].

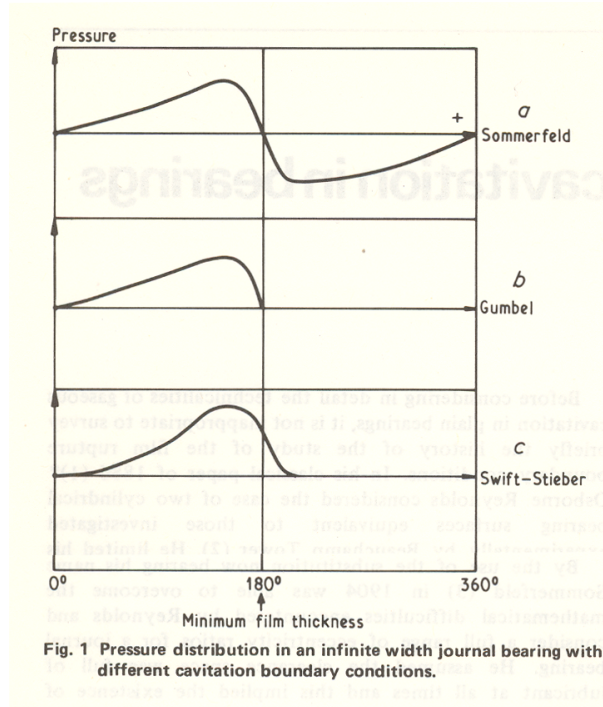


FIGURE 1.19 – Distribution de la pression pour les différents modèles de cavitation[DT74]

1.9.4 Le modèle Jakobsson-Floberg-Olsson (JFO)

Le premier modèle de JFO

Floberg suppose que l'écoulement dans la zone cavitée se fait entre des filets de gaz. Cette zone va être formée par une juxtaposition de zones d'huile et de gaz. Le fluide n'occupe donc dans la zone cavitée qu'une proportion (inconnue) θ du volume. Cette dernière s'interprète historiquement dans le plan de l'écoulement (figure 1.20 droite), mais certains auteurs l'interprètent aussi dans le sens transverse à l'écoulement (figure 1.20 gauche).

Le débit (du modèle de Reynolds) dans la zone cavitée en fonction de cette proportion s'écrit alors :

$$\vec{Q}_0 = \frac{h\theta \vec{u}}{2}$$

En écrivant la continuité du débit, il obtient une équation donnant implicitement les frontières libres.

L'aspect purement bidimensionnel de l'étude et la difficulté d'interpréter θ vont donner lieu à de nombreuses controverses [DT74] [PKR08].

1.9. LES MODÈLES DE CAVITATION

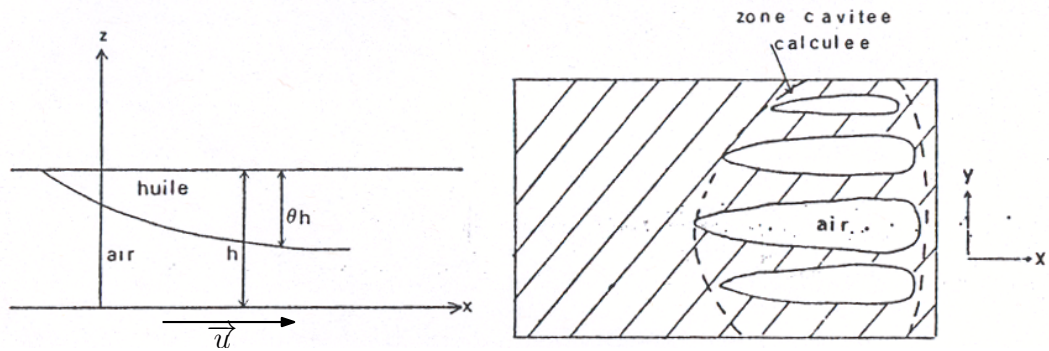


FIGURE 1.20 – représentation de θ et de l'écoulement [BC86]

Le modèle d'Elrod-Adams

Elrod et Adams [EA74] [Elr81] vont reprendre le modèle de JFO, en définissant la variable $\theta(x, y)$ comme une proportion locale de fluide au voisinage d'un point $M(x, y)$. Le débit proposé s'écrit en tout point du domaine :

$$\vec{Q} = \frac{\theta h \vec{u}}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \nabla p + \frac{\partial \theta h}{\partial t} \quad \text{avec } \theta = 1 \text{ sur } \Omega_+ \text{ et } \theta \in [0, 1] \text{ sur } \Omega_0 \quad (1.4)$$

La continuité du débit se traduira par :

$$\text{div}(\theta h \vec{u}) = \frac{\partial \theta h}{\partial t}$$

On obtient à l'interface la condition :

$$\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\vec{u}}{2} (1 - \theta) \cdot (\vec{u}, \vec{n})$$

Le problème est donc un système d'équations à deux inconnues P et θ , dont l'interprétation physique est qu'il garantit la continuité du débit. Bayada et Chambat [BC83] en font une étude mathématique pour un palier infiniment long. Ce modèle a donné lieu à de nombreux travaux mathématiques portant sur l'existence, l'unicité, les propriétés qualitatives des solutions aussi bien en régime stationnaire qu'en régime transitoire. [BC83] [CC83] [BCV98] [BV07] [BCA90]

Ce modèle donne des résultats numériques généralement assez satisfaisants [PDT00] [BH10]. Cependant il impose comme dans le modèle de Reynolds, une pression constante dans la zone cavité et néglige les effets de tension de surface. Ces deux points sont à prendre en compte pour des dispositifs faiblement chargés.

Le modèle de Reynolds, Elrod-Adams est très performant et donne des résultats cohérents dans bien des situations.

Le modèle de Coyne-Elrod

Coyne et Elrod [CH70, CH71] ont étudié spécifiquement l'influence de la tension de surface à la rupture de film en supposant que l'écoulement s'effectue sous la forme d'une partie fluide entraînée par la

surface mobile avec une bulle de gaz au dessus (palier infiniment long). Ils proposent une condition aux limites spécifique mais qui est difficilement applicable en dimension 3.
La condition sur Σ devient :

$$p = p_2 \quad \frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{u}{2} \left(1 - \frac{h_\infty}{h}\right)$$

Où $\frac{h_\infty}{h}$ est la proportion d'huile loin du contact.

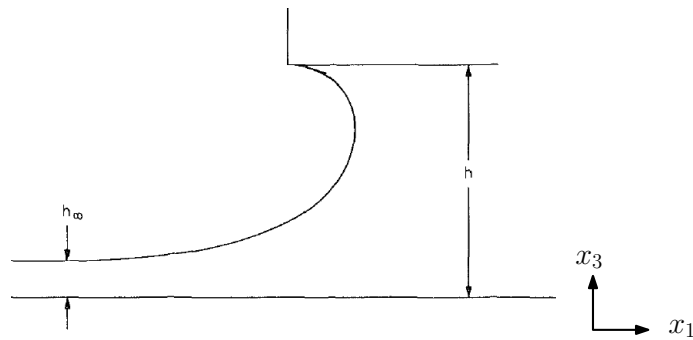


FIGURE 1.21 – Description des variables [CH71]

Avancées récentes dans la modélisation de la cavitation

Le modèle d'Elrod-Adams ($P - \theta$) est actuellement le modèle le plus couramment utilisé mais il présente cependant certaines insuffisances :

- a Il ne peut pas être justifié physiquement à partir des équations de Navier-Stokes. En effet, il est obtenu par une modification locale (introduction du θ) des équations de Reynolds qui ont été validées seulement sous l'hypothèse d'un écoulement homogène.
- b Il ne permet pas d'obtenir des pressions inférieures à la pression de vapeur saturante alors que celle-ci sont régulièrement observées [BH84], en particulier pour des dispositifs faiblement ou moyennement chargés.
- c Dédurre de ce modèle ($P - \theta$) une épaisseur de film d'huile à partir de la valeur de la variable de saturation θ est très discutable. En supposant que le film d'huile dans la zone cavitée adhère à la surface mobile de nombreux auteurs [Org07] proposent d'utiliser θh comme une épaisseur de film d'huile. Cependant ceci fait apparaître une contradiction entre le débit qui devrait être associé à cette géométrie de l'écoulement ($\theta h \vec{u}$) et le débit du modèle de Reynolds dans la zone cavitée qui devrait être $h\theta \frac{\vec{u}}{2}$ d'après l'équation (1.4).

Une solution serait de considérer une hauteur de film $\frac{\theta h}{2}$ mais cette procédure n'est pas utilisable en régime transitoire.

Des travaux théoriques récents ont cependant permis d'avancer sur les différents aspects.

(a)–(b) Il a été montré récemment [BC12] que le modèle ($P - \theta$) pouvait être considéré comme une approximation d'un modèle de Reynolds compressible [CS12] pour un fluide barotrope. En effet dans ce cas, la loi constitutive qui définit la relation pression-densité (figure 1.22(a)) est très proche

1.9. LES MODÈLES DE CAVITATION

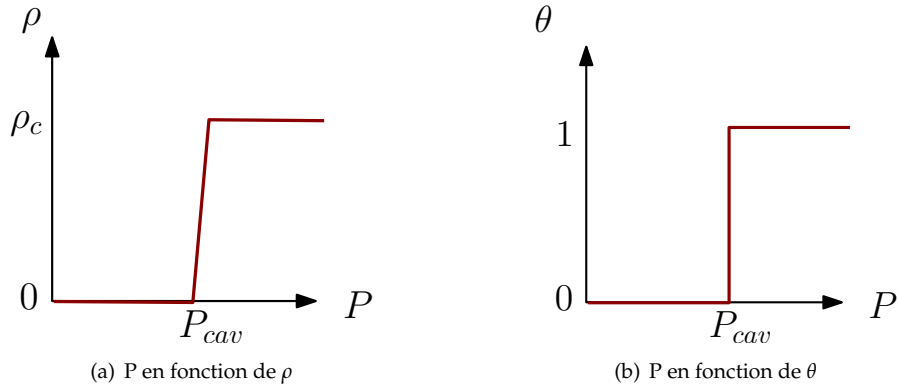


FIGURE 1.22 – Relation entre la pression et la densité(a) et la saturation(b) (ρ_c : densité de cavitation)

de la relation $(P - \theta)$ (figure 1.22(b)). Elle permet ainsi à la pression d'être inférieure à la pression de cavitation. Ces résultats montrent aussi que la densité pour un écoulement de faible épaisseur tend à être indépendante de la dimension transverse à l'écoulement qui dans la zone cavitée doit alors être considéré comme un "mélange" se déplaçant avec une vitesse $\frac{U_1}{2}$, la moyenne des vitesses des deux surfaces.

(c) Indépendamment de la justification physique à partir des équations de Navier-Stokes, on peut envisager un modèle qui soit proche du modèle $(P - \theta)$ mais pour lequel la définition de θh comme hauteur effective du film d'huile ne soit pas en contradiction avec la définition du débit dans les équations de base de l'écoulement (1.4). Ce modèle devrait vérifier :

- l'équation de Reynolds dans le domaine non cavité.
- un écoulement dans la zone cavitée associée à une hauteur de film θh .
- une conservation du débit à l'interface.

Le problème s'écrit alors :

Trouver (p, θ) tels que :

$$p > p_{cav}, \theta = 1 \quad (1.5)$$

$$p = p_{cav}, 0 < \theta < 1 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{S}{2} \frac{\partial \theta h}{\partial x} + \frac{\partial \theta h}{\partial t} \quad \text{si } p > p_{cav} \quad (1.7)$$

$$S \frac{\partial \theta h}{\partial x} + \frac{\partial \theta h}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

$$h^3 \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = S(1 - 2a\theta) h \cos(\vec{n}, \vec{x}) \quad (1.9)$$

où \vec{n} est le vecteur normal extérieur à la frontière entre la zone pressurisée et la zone de cavité, et a est un paramètre de vitesse du fluide à définir. ($a \in [\frac{1}{2}, 1]$)

L'introduction d'un "saut" dans le second membre de l'équation conduit à des difficultés mathématiques pour obtenir l'existence de solutions à ce problème. Dans le chapitre 4, on montrera qu'il est possible (en dimension 1) d'obtenir un résultat d'existence et de définir des conditions sous lesquelles la solution est unique.

1.10 Sur les difficultés et limites de la modélisation des surfaces texturées

Dans le cadre de la lubrification, les observations ont montré l'importance de la finition d'une surface adéquate. Michell (1950) est l'un des premiers à faire une analyse des effets des rugosités pour des roulements. Il teste les performances d'une rugosité ayant une forme sinusoïdale et regarde ses performances hydrodynamiques. Il constate alors l'importance de l'amplitude de ces rugosités sur le coefficient de frottement ainsi que sur la capacité de charge du contact.

Tipei, Pascal(1966), Dowson, Whomes (1971) étudient l'influence des géométries macroscopiques et microscopiques des rugosités (rectangulaires, triangulaires) sur la génération de pression hydrodynamique.

Des outils statistiques et de probabilité permettent de classer et de caractériser une surface rugueuse (Tzeng, Saibel(1967)). Ces caractéristiques sont ensuite utilisées pour calculer les propriétés tribologiques de ces surfaces (Christensen, Tonder (1970-1972)). On peut mentionner les travaux de Patir et Cheng (1979) qui sont toujours utilisés de nos jours. Pour tenir compte des rugosités, ils introduisent des "flows factors", issus des paramètres statistiques de la rugosité, dans la partie du débit de Poiseuille de l'équation de Reynolds.

Malgré l'existence de ces nombreux travaux tant expérimentaux que théoriques sur la modélisation et l'optimisation de surfaces texturées, il s'avère qu'il est difficile de donner une réponse simple sur l'intérêt de cette texturation, car il est difficile de prendre en compte et de contrôler simultanément l'ensemble des phénomènes qui interviennent.

Nous donnons ici quelques exemples illustrant les différentes approches.

- De manière théorique, Bayada et Faure [BF89] utilisent la technique d'homogénéisation et un modèle de cavitation de type Reynolds pour montrer l'influence de l'orientation des rugosités pour des paliers.(figure 1.23) Pour des paliers avec $\frac{L}{D}$ petit, les rugosités longitudinales améliorent la capacité de charge, alors que pour des paliers avec $\frac{L}{D} \geq 1$, ce sont les rugosités de type transverses qui sont les meilleures. (L : la longueur du palier, D : le diamètre)

- Pettersson *et al.* [PJ03] testent différents types de rugosités du point de vue du frottement mais ils montrent surtout l'influence du revêtement (TiN, et DLC (carbone de densité voisine de celle du diamant)). Ils considèrent des textures en lignes parallèles (perpendiculaires au déplacement) et des maillages carrés de différentes tailles (5, 10, 20 microns). Les conditions de l'expérience sont une hauteur d'huile en entrée de 10 μm et une charge de 5 Newton.

Dans le cas du revêtement TiN, ils observent pour un faible nombre de cycles, un frottement moindre dans le cas des textures(figure 1.24(a)). Cependant, l'usure plus importante des textures fait qu'à long terme, le frottement des surfaces texturées devient plus important(figure 1.25(a)).

Dans le cas du revêtement DLC, c'est l'inverse. Pour une surface neuve, les textures entraînent un frottement plus important(figure 1.24(b)), mais à long terme celui-ci devient inférieur à celui des surfaces non texturées(figure 1.25(b)).

Les travaux de Pettersson *et al.* [PJ07] vont ensuite s'orienter vers des cas plus chargés, avec le même type de textures. Ils vont relever l'usure sur 1000 cycles ainsi que le coefficient de frottement avec une charge de 100 MPa. Ils concluent que les surfaces texturées sont plus stables au niveau du coefficient de frottement, mais que les déformations de surface sont importantes, et qu'il ne faudra pas les négliger.

- L'usinage chimique permet d'obtenir des surfaces à la géométrie parfaitement contrôlée et d'éviter les débris de métaux et les défauts de relief comme les bourrelets provoqués par les procédés laser.

1.10. SUR LES DIFFICULTÉS ET LIMITES DE LA MODÉLISATION DES SURFACES TEXTURÉES

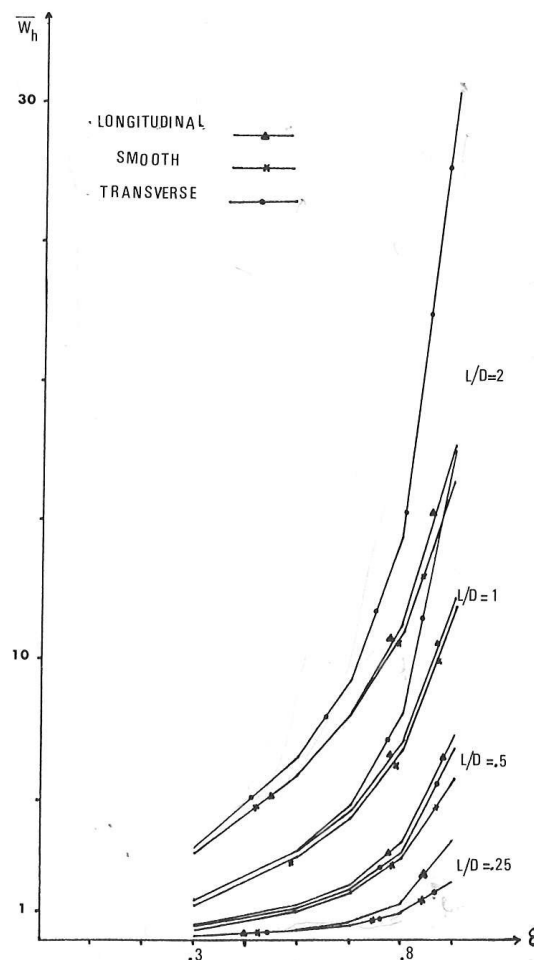


Fig. 6 Homogenized load versus eccentricity for various L/D ratios and roughness patterns. Axial groove. Reynolds model $\alpha = .15$.

FIGURE 1.23 – Charge hydrodynamique en fonction de l'excentricité pour différentes configurations du palier

Les plateaux peuvent être considérés comme parfaitement plats ($R_a = 0.05\mu m$). Dans ces conditions, Costa *et al.* [CH07] testent 3 types de géométrie (chevrons, coupelles, lignes). Ils observent que les chevrons sont la configuration la meilleure (frottement limité, hauteur d'huile plus importante). L'orientation des chevrons a une importance considérable. On peut passer d'un frottement 3 fois moins important à une augmentation de 25% du frottement par rapport au cas rainuré. (charge de 12.3 à 80.9 N, hauteur de film de 16 à 3 microns)

- Etsion [EP98, Ets05, ES09] a effectué de nombreuses études sur les problèmes de rugosité. Cependant les résultats qu'il a obtenu sont essentiellement basés sur des modèles de cavitation de type Reynolds. Or les travaux récents de Ausas *et al.* [ARL⁺07, AJB09] ont montré l'importance d'un modèle de cavitation conservatif pour l'étude de surfaces rugueuses, les forces de frottements étant surestimées par le modèle de Reynolds dans le cas de surfaces texturées (figure 1.26). Ils concluent d'ailleurs que le modèle de Reynolds sous estime grandement les zones de cavitation à cause de la condition implicite qui fait que la cavitation ne peut apparaître que dans une géométrie divergente.
- Watanabe *et al.* [WiNH⁺00] montrent l'importance de la prise en compte des déformations élastiques des surfaces [EHL] pour un palier. En utilisant des textures formant des lignes parallèles usées, ils

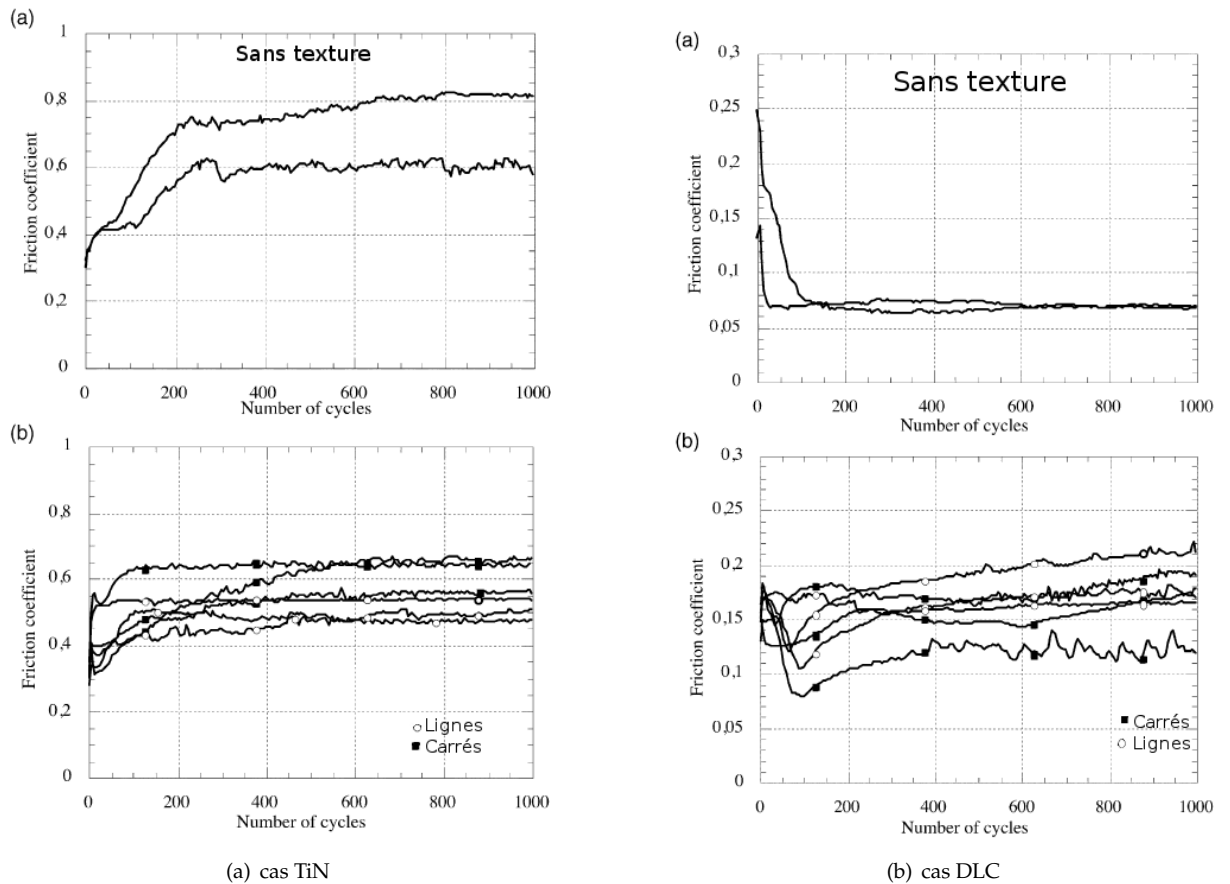


FIGURE 1.24 – frottement sur des surfaces neuves

montrent que le film d'huile est plus épais de 30 à 40% dans le cas (EHL) par rapport au cas (HL). (charge maximum 6.8 MPa ,hauteur de film de 0.05 à 0.7 μm)

1.11 Modélisation du contact entre aspérités

Dans ce paragraphe, nous allons traiter de la modélisation du contact de surfaces rugueuses entre elles. Un des modèles utilisés pour prendre en compte le contact est celui de Greenwood-Williamson (1966) [GW66]. Celui-ci est simple mais limité par ses hypothèses qui sont :

1. les rugosités sont isotropiques
2. les sommets des aspérités ont une forme parabolique (ou sphérique)
3. tous les sommets des aspérités ont le même rayon de courbure, et leurs hauteurs au dessus du plan de référence suivent une loi normale de densité de probabilité
4. les déformations sont élastiques, et jamais plastiques. Il n'y a pas de déformation majeure des surfaces. Seules les aspérités se déforment lors d'un contact.
5. les aspérités sont éloignées et il n'y a pas d'interaction entre elles

L'hypothèse que le contact est supporté par des aspérités permet d'appliquer la théorie du contact de Hertz pour calculer la force normale associée au contact d'une aspérité sur la surface opposée. En utilisant des caractéristiques statistiques liées à la géométrie des aspérités, il est possible d'exprimer la force

1.11. MODÉLISATION DU CONTACT ENTRE ASPÉRITÉS

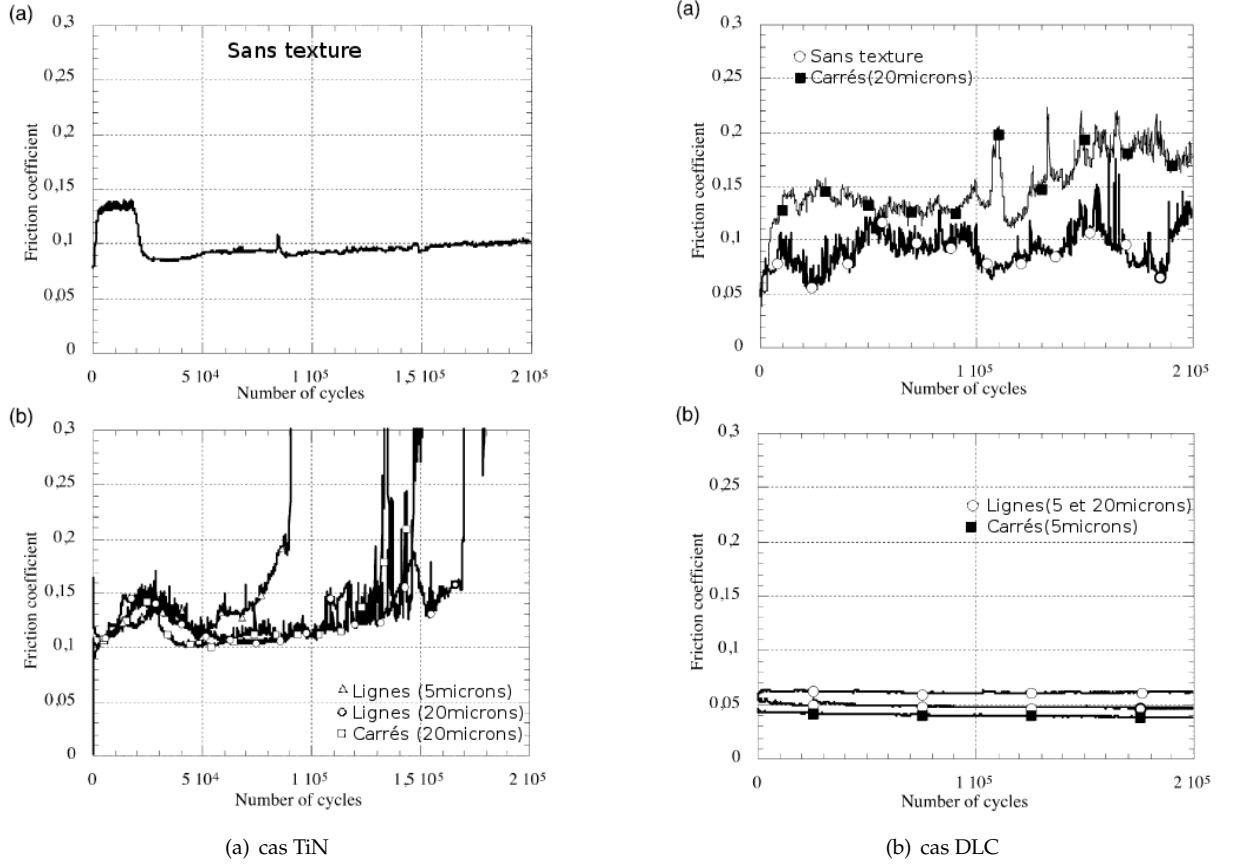


FIGURE 1.25 – frottement pour 2.10^5 cycles

de contact générée par l'ensemble des aspérités.

Dans le cas piston-segment-chemise, la rugosité principale est localisée sur la chemise et on peut représenter le contact comme sur la figure 1.27(a), où $z = h_1(x)$ et $z = h_2(x)$ définissent les géométries respectives du piston-segment et de la chemise.

On introduit le plan moyen H_2 qui est la moyenne de la surface rugueuse et l'écart type σ .

$$H_2 = \sqrt{\int h_2(x)^2 dx} \quad \sigma = \sqrt{\int (h_2(x) - H_2)^2 dx} \quad (1.10)$$

Pour chaque point x , la pression de contact de Greenwood-Tripp-Williamson se définit en fonction de KT , du quotient $\lambda(x) = \frac{H_2 - h_1(x)}{\sigma}$ et d'un indice n par :

$$P_{\text{contact}}^n(\lambda(x)) = KT_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda(x)}^{\infty} (u - \lambda(x))^n e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (1.11)$$

	Smooth		Textured	
	Reynolds	$p-\theta$	Reynolds	$p-\theta$
Cavitated area	0.0194	0.0284	0.0033	0.0278
Friction torque	1.3719	1.2912	1.8132	1.3293
Couette term	1.2850	1.2036	1.6592	1.1763
Poiseuille term	0.0869	0.0876	0.1539	0.1530
Eccentricity	0.8291	0.8278	0.8479	0.8497

FIGURE 1.26 – comparatif des modèles d’Elrod-Adams et de Reynolds pour un cas texturé et un cas lisse

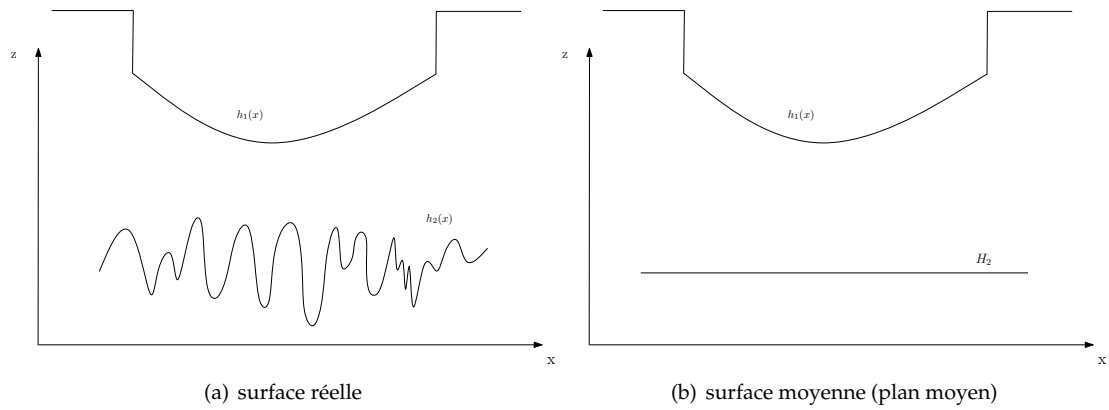


FIGURE 1.27 – Distance intervenant dans le modèle de Greenwood-Tripp-Williamson

où :

$$KT_{n=\frac{5}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\eta\beta\sigma) E' \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}} \cdot \frac{8\pi}{5} (\eta\beta\sigma)$$

$$KT_{n=\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} (\eta\beta\sigma) E' \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}$$

- E' : le module de Young composite-élastique, dépend des caractéristiques des matériaux,

- β : le rayon moyen des aspérités,

- η : la densité des aspérités,

- n un paramètre choisi par l'utilisateur dépendant du modèle utilisé (pour le modèle de Greenwood-Williamson [GW66] $n = \frac{3}{2}$, les deux surfaces en contact ont la même rugosité, pour Greenwood et Tripp [GT71] $n = \frac{5}{2}$, les surfaces n'ont pas la même rugosité).

Le choix du modèle s'est porté sur Greenwood-Tripp[GT71] $n = \frac{5}{2}$, car ce modèle a été validé expérimentalement par Handzel-Powierza *et al.*[HPKP92] [Cha11], et est toujours pris en exemple pour les nouveaux modèles de contact [ZMC00].

Remarque 1 : Greenwood et Williamson avaient ajusté le modèle de telle sorte que :

$$KT = \frac{8\pi}{5} (\eta\beta\sigma) K_{GW} \quad (1.12)$$

$$K_{GW} = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\eta\beta\sigma) E' \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}$$

1.11. MODÉLISATION DU CONTACT ENTRE ASPÉRITÉS

$$K_{GW} = 1000 \text{ kgf/cm}^2.$$

pour avoir une pression représentant 1000 kgf/cm^2 , c'est-à-dire environ 10^8 Pa .

Remarque 2 : Le module de Young composite-élastique des deux matériaux en contact s'exprime :

$$\frac{E'}{E_1} \frac{1 - \nu_1^2}{1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (1.13)$$

où :

- E_1 : module de Young de la chemise,
- ν_1 : coefficient de Poisson de la chemise,
- E_2 : module de Young du segment,
- ν_2 : coefficient de Poisson du segment,

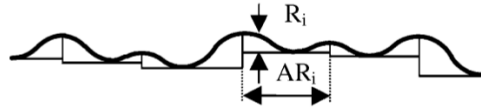
Les valeurs numériques pour ces paramètres sont :

	Chemise	Segment racleur	Segment coupe-feu
module de Young (Pa)	$E_1 = 1.15e^{11}$	$E_2 = 1.9e^{11}$	$E_2 = 2.1e^{11}$
coefficient de Poisson ν	0.3		

TABLE 1.3 – valeurs numériques pour le module de Young composite

Remarque 3 : Robbe-Valloire [FRV01] propose une autre approche pour déterminer les paramètres (β, η) à l'aide d'autres paramètres statistiques qui sont :

- R moyenne des hauteurs R_i du motif
- SR écart type des hauteurs
- AR moyenne des largeurs AR_i du motif
- SAR écart type des largeurs



$$\beta = \frac{1}{16} \left(\frac{AR^2 + SAR^2}{R} \right) \quad (1.14)$$

$$\eta = 1.2 \frac{1}{AR^2} \quad (1.15)$$

Le principal problème de cette méthode est d'isoler les motifs d'où l'on extraira les paramètres géométriques (R_i, AR_i) dont on fera ensuite la moyenne. Les critères, définissant l'espacement des pics en largeur et en longueur ainsi que les motifs de la surface, sont les suivants :

- condition sur l'enveloppe : deux motifs ne peuvent être combinés si leur pic central est plus grand que les pics du bord de l'autre motif,
- condition sur la largeur : deux motifs peuvent être combinés si leur largeur est inférieure à $500 \mu\text{m}$,
- condition sur la variation de hauteur : deux motifs peuvent être combinés si la taille caractéristique du pic est beaucoup plus petite que celle de l'ensemble des autres pics du motifs,
- condition sur l'adjacence : deux motifs peuvent être combinés si ces deux motifs ont un pic commun d'une hauteur supérieure à 60% de la taille caractéristique des hauteurs des pics de chacun des motifs.

Cela peut entraîner un filtrage qui peut être trop important dans le cas de certaines surfaces. (motif large, avec des pics isolés) Les résultats obtenus sont assez éloignés de ce que l'on trouve dans la littérature([GT71], [TPZ11]) par rapport à une surface mesurée. Il faudrait essayer de recalculer ces mêmes valeurs à l'aide d'autres critères de sélection des paramètres AR et SAR , qui ne sont à priori pas adaptés au type de surface que l'on étudie. Or ces paramètres vont déterminer l'intensité de la force de contact dans le modèle de Greenwood-Tripp-Williamson.

Remarque 4 : Pour calculer les données statistiques du modèle de Greenwood-Tripp-Williamson, McCool [McC86] propose une estimation des paramètres η, β, σ du modèle à l'aide des moyennes quadratiques de $h_2, \frac{\partial h_2}{\partial x}, \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}$ par :

$$m_0 = R_q^2 = \int (h_2(x) - H_2)^2 dx \quad (1.16)$$

$$m_2 = \int \left(\frac{\partial(h_2(x) - H_2)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1.17)$$

$$m_4 = \int \left(\frac{\partial^2(h_2(x) - H_2)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (1.18)$$

$$\eta = \frac{m_2}{m_4} \frac{1}{6\pi\sqrt{3}} \quad (1.19)$$

$$\sigma = \sqrt{m_0} \quad (1.20)$$

$$\beta = \frac{8\sqrt{m_4}}{3\sqrt{\pi}} \quad (1.21)$$

Remarque 5 : Différentes approximations de l'intégrale dans l'équation (1.11) ont été proposées lorsque $n = \frac{5}{2}$ [PS08, HCAK94, AOM97]. Nous utilisons celle de Payani et Schock [PS08] :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} (u - \lambda)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \exp\left(\frac{c_1 + c_2\lambda + c_3\lambda^2}{1 + c_4\lambda + c_5\lambda^2}\right) + c_6 \quad (1.22)$$

Où les constantes $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ sont fixées et connues.

Cette approximation utilise le caractère gaussien de la distribution des rugosités $\phi(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Remarque 6 :

Beaucoup d'autres tentatives d'enrichir le modèle de Greenwood-Tripp-Williamson et de combler ses failles ont été étudiées, au prix d'un alourdissement des formules ou des systèmes à résoudre. Une des limitations principales concerne le fait que dans la théorie de Greenwood-Tripp-Williamson, l'ensemble de la surface est pris en compte dans le calcul des paramètres de rugosité alors que pour une surface réelle formée de "vallées" et de "plateaux", la rugosité qui intervient est celle des plateaux. Ceci revient à remettre en cause le choix du plan moyen H_2 comme courbe de référence permettant de calculer à la fois l'écart type σ et la variable λ intervenant dans la loi de Greenwood-Tripp-Williamson. Nous verrons au chapitre suivant comment cet aspect a été pris en compte.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION

2.1 Le système Piston-Segment-Chemise - Modélisation

Dans cette section, les variables dimensionnées sont notées avec des $\bar{}$ et les variables adimensionnées sans.

2.1.1 Description

Le piston comporte en général 3 segments. Ils sont schématisés par une vue en coupe (figure 2.1). Chaque segment est indépendant et peut se mouvoir perpendiculairement à la chemise, dans une gorge dessinée dans le piston. On négligera les inclinaisons des segments du fait de l'existence d'un jeu axial entre la gorge du piston et le segment.

Le système est gouverné par la loi fondamentale de la dynamique appliquée à chacun des segments

$$\vec{F}_{\text{imposée}} + \vec{F}_{\text{hydrodynamique}} + \vec{F}_{\text{contact}} = \bar{M} \frac{d^2 \vec{X}}{d\bar{t}^2} \quad (2.1)$$

où X représente la distance entre l'extrémité du segment et un plan de référence.

Les forces hydrodynamique et de contact sont fonction de $\bar{X}(\bar{t})$. Pour chaque \bar{t} , nous calculons ces forces et nous en déduisons une force de frottement totale et les courbes de Stribeck (1.16) correspondantes.

2.1.2 Forces imposées

Les forces imposées $\vec{F}_{\text{appliquée}}$ seront fixées au cours du calcul. Elles prennent en compte à la fois F_t , la tare du segment et la pression des gaz de compression, laquelle va venir exercer une force sur le segment F_{gaz} .

2.1. LE SYSTÈME PISTON-SEGMENT-CHEMISE - MODÉLISATION

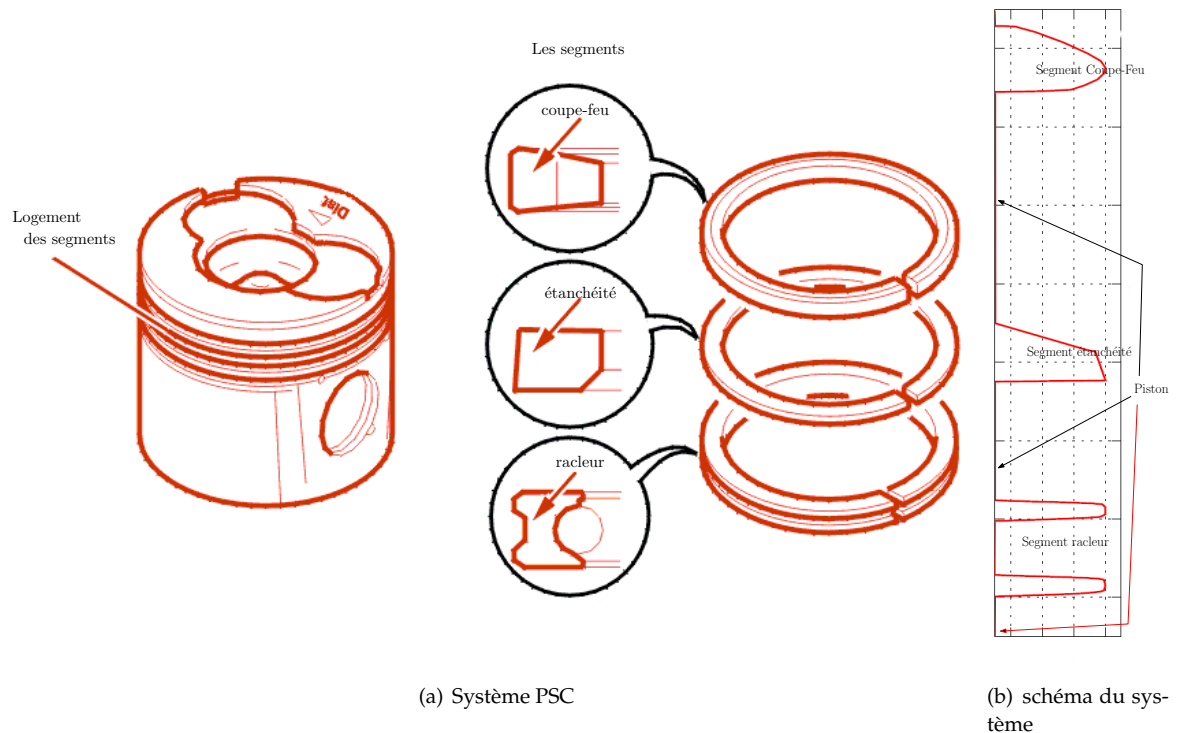
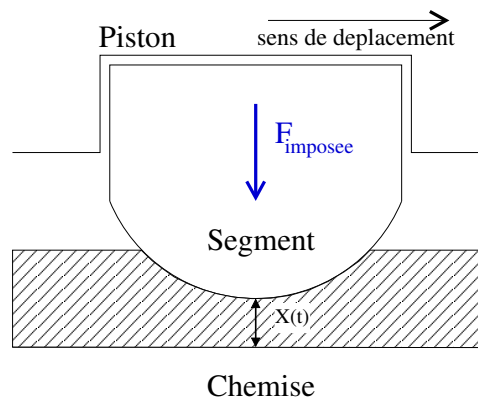


FIGURE 2.1 – Représentation du système PSC



2.1.3 Force hydrodynamique

À chaque temps, la connaissance de $\bar{X}(\bar{t})$, de la géométrie des segments et celle de la surface de la chemise permet de calculer la distance $\bar{h}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ entre le segment et la chemise. Nous pouvons alors résoudre les équations de l'hydrodynamique en prenant en compte la rugosité réelle.

La cavitation est décrite par le modèle $(P - \theta)$, section 1.9.4, basé sur la conservation du débit. On en déduit à la fois les forces de frottement dues au lubrifiant et les forces hydrodynamiques.

Soit $\bar{u} \in \mathbb{R}$, la vitesse relative de déplacement des parois.

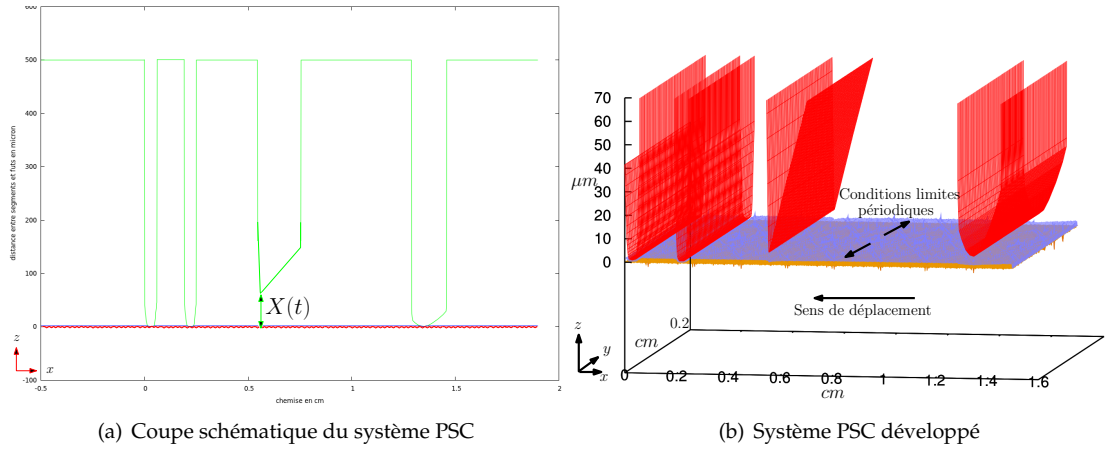


FIGURE 2.2 – Représentation du système piston-segment-chemise (PSC)

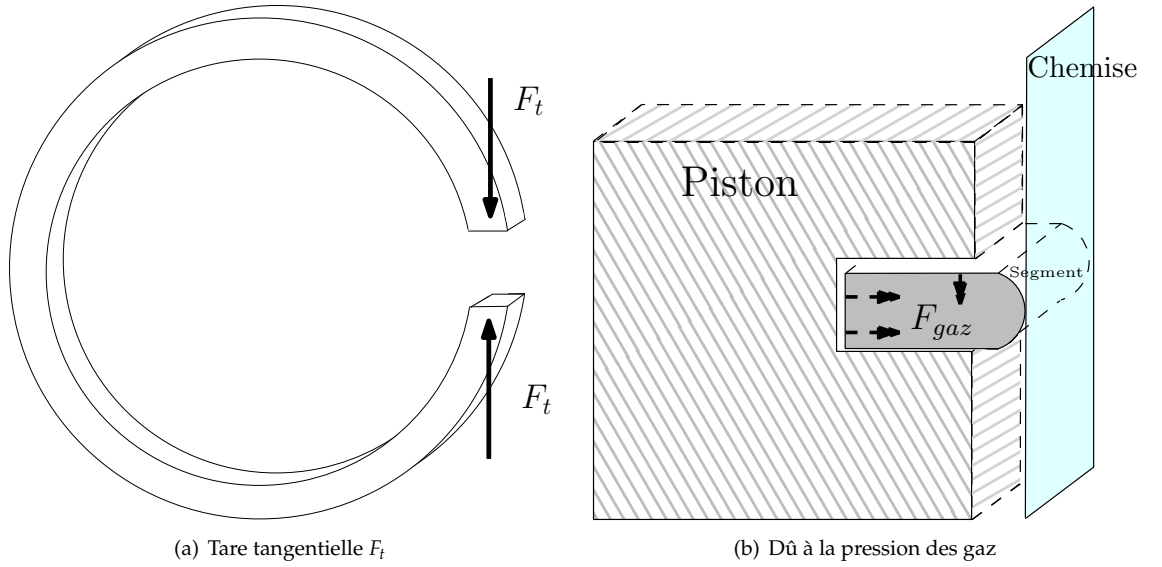


FIGURE 2.3 – Les différentes forces appliquées

Soit $\bar{\Omega} = ([0, \bar{L}] \times [0, \bar{B}])$ (figure 2.2), le modèle $(\bar{P}, \bar{\theta})$ s'écrit :

$$\Omega_+ = \{(\bar{x}, \bar{y}) | \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) > 0\} \quad (2.2)$$

$$\Omega_0 = \{(\bar{x}, \bar{y}) | \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0\} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}}(\bar{h}\theta) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\bar{u}}{2}\bar{h}\theta\right) = \text{div}\left(\frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}}\nabla\bar{p}\right) \quad \text{sur } \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_+ \cup \bar{\Omega}_0 \quad (2.4)$$

$$\theta = 1 \text{ et } \bar{p} > 0 \quad \text{sur } \bar{\Omega}_+ \quad (2.5)$$

$$\theta \in]0, 1[\text{ et } \bar{p} = 0 \quad \text{sur } \bar{\Omega}_0 \quad (2.6)$$

$$\bar{p}(0, \bar{y}, \bar{t}) = 0 \quad (2.7)$$

$$\bar{p}(\bar{L}, \bar{y}, \bar{t}) = p_a \quad (2.8)$$

$$\bar{p}(\bar{x}, 0, \bar{t}) = \bar{p}(\bar{x}, \bar{B}, \bar{t}) \quad (2.9)$$

$$\frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = (1 - \theta^-)\bar{h}[\bar{u}_n - \bar{q}_n] \quad \text{sur la frontière } \bar{\Sigma} = \bar{\Omega}_+ \cap \bar{\Omega}_0 \quad (2.10)$$

2.1. LE SYSTÈME PISTON-SEGMENT-CHEMISE - MODÉLISATION

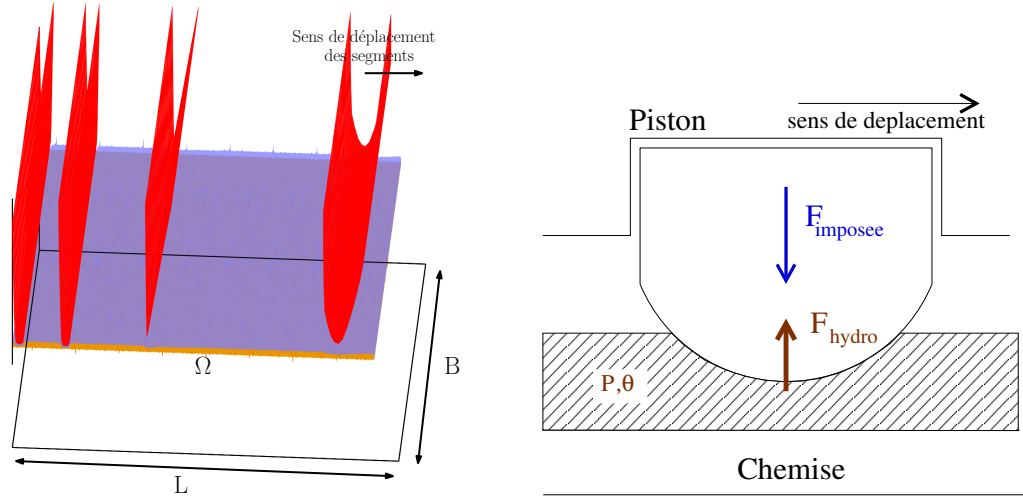


FIGURE 2.4 – Représentation du domaine Ω et de la force hydrodynamique sur un segment

où :

- \bar{u}_n est la projection sur la normale sortante vers $\bar{\Omega}_0$ de $\bar{\Sigma}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ de \vec{u} ,
- \bar{q}_n est la projection sur la normale sortante vers $\bar{\Omega}_0$ de $\bar{\Sigma}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ de la vitesse de déplacement de la frontière Σ .

Une fois le système résolu, la connaissance de \bar{p} et \bar{h} permet d'exprimer les vitesses locales du fluide :

$$\bar{u}_x = \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \bar{z}(\bar{z} - \bar{h}) + \bar{u}\theta \frac{\bar{h} - \bar{z}}{\bar{h}} \quad (2.11)$$

$$\bar{u}_y = \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \bar{z}(\bar{z} - \bar{h}) \quad (2.12)$$

et de calculer les forces hydrodynamiques :

$$F_{hydrodynamique} = \iint_{\Omega_+} \bar{p} ds \quad (2.13)$$

2.1.4 Force de contact

Le modèle choisi pour la force de contact est celui proposé par Greenwood, Tripp et Williamson (voir section 1.11).

La pression de contact s'exprime alors par :

$$\bar{P}_c(\bar{\lambda}) = \bar{K}\bar{E}' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{\lambda}}^{\infty} (u - \bar{\lambda})^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (2.14)$$

où :

\bar{K} dépend des paramètres de rugosité (cf. équation (1.12) section 1.11) et $\bar{\lambda}(x) = \frac{\bar{H}_2 - \bar{h}_1(x)}{\bar{\sigma}}$.

Avec :

$$\bar{H}_2 = \sqrt{\int \bar{h}_2(x)^2 dx} \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\int (\bar{h}_2(x) - \bar{H}_2)^2 dx}$$

La pression de contact est pratiquement nulle lorsque la distance $\bar{\lambda}(x) > 4$, aussi nous ne calculons cette force de contact que pour les points vérifiant :

$$\{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Omega} \mid \bar{H}_2 - \bar{h}_1(x, y) < 4\bar{\sigma}\} \quad \text{"zone de contact"} \quad (2.15)$$

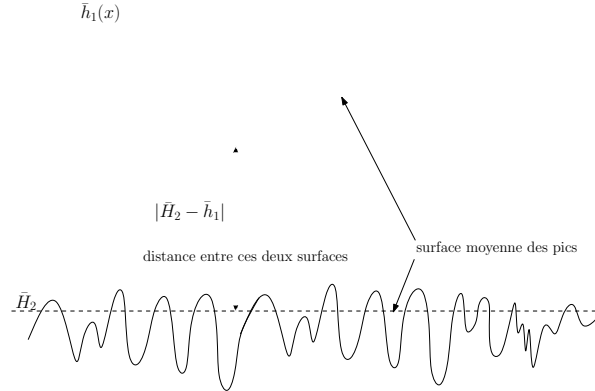


FIGURE 2.5 – Représentation de la distance entre les 2 surfaces moyennes

La force de contact est définie par :

$$\bar{F}_{\text{contact}} = \iint_{\text{zone de contact}} \bar{p}_c(\bar{\lambda}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}), \bar{t}) d\bar{x}d\bar{y} \quad (2.16)$$

2.1.5 Force de frottement

La force de frottement est due à deux types de forces :

– à la force hydrodynamique

Connaissant le champ de pression calculé par (2.2)-(2.10), la force de frottement due au cisaillement du fluide est déterminée à l'aide de la loi de Newton :

$$\vec{F}_{\text{frottement hydro}} = \begin{pmatrix} \bar{\tau}_{xy} \\ \bar{\tau}_{yz} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{z}} \\ \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial \bar{z}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

En pratique, la force de frottement normale $\bar{\tau}_{yz}$ est très faible devant la force de frottement tangentielle $\bar{\tau}_{xy}$ et est donc négligée.

En utilisant l'équation (2.11), et en considérant que le frottement est calculé sur le segment, on obtient :

$$\bar{F}_{\text{frottement hydro}} = \iint_{\bar{\Omega}} \bar{\tau}_{xy} = \iint_{\bar{\Omega}} \bar{\mu} \left(\frac{1}{2\bar{\mu}} \bar{h} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{u}\theta}{\bar{h}} \right) d\bar{x}d\bar{y} \quad (2.18)$$

– à la force de contact

Connaissant le coefficient de frottement sec $\bar{\mu}_s$ lié aux matériaux, le frottement s'exprime alors :

$$\bar{F}_{\text{frottement de contact}} = \bar{\mu}_s \bar{F}_{\text{contact}} \quad (2.19)$$

où \bar{F}_{contact} est obtenue par l'équation (2.16).

2.2 Résolution numérique du problème hydrodynamique

2.2.1 Adimensionnement

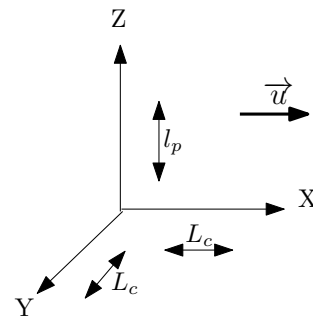
L'écriture du système peut être simplifiée en utilisant un adimensionnement approprié qui est différent de celui utilisé à la section 2.2.1 pour obtenir l'équation de Reynolds.

On définit les variables adimensionnées par :

- $x = \frac{\bar{x}}{L_c}$, où L_c est une longueur (en cm)
- $y = \frac{\bar{y}}{L_c}$
- $z = \frac{\bar{z}}{l_p}$, où l_p est une longueur (en μm)

d'où :

- $B = \frac{\bar{B}}{L_c}$
- $L = \frac{\bar{L}}{L_c}$
- $h = \frac{\bar{h}}{l_p}$



Le temps va être adimensionné en fonction de la vitesse de déplacement relatif des deux parois et de la longueur.

- $V = \frac{10^3 L_c}{T_s}$, où T_s est exprimé en s
- $u = \frac{\bar{u}}{\bar{V}}$, où V est exprimé en $10 m.s^{-1}$
- $t = \frac{\bar{t} V}{L_c}$

La viscosité est adimensionnée à l'aide de la valeur de la viscosité du fluide μ_0 à la température de fonctionnement.

- $\mu = \frac{\bar{\mu}}{\mu_0}$

L'adimensionnement de la pression \bar{P} découle du remplacement des variables adimensionnées précédentes dans l'équation 2.13 :

- $P = \frac{\bar{P}}{P_{adim}}$ avec $P_{adim} = \frac{6VL_c\mu}{l_p^2}$

L'adimensionnement de la force et de la charge découle de l'expression de la pression :

- $P = \frac{F}{L_c^2}$ d'où $F = \frac{\bar{F}}{F_{adim}}$ avec $F_{adim} = \frac{6VL_c^3\mu}{l_p^2}$
- $W_{linéique} = P \cdot L_c$ d'où $W_{adim linéique} = \frac{6VL_c^2\mu}{l_p^2}$

La masse du segment m s'adimensionne d'après l'équation (2.1) et avec les adimensionnements précédents :

- $M = \frac{\bar{m}}{m_{adim}}$ avec $m_{adim} = \frac{L_c^5 6\mu}{V l_p^3}$ et pour la masse linéique $m_{adim linéique} = \frac{L_c^4 6\mu}{V l_p^3}$,

Le système (2.2)-(2.10) s'exprime alors sur $\Omega = [0, L] \times [0, B]$:

$$\Omega_+ = \{(x, y) | p(x, y, t) > 0\} \quad (2.20)$$

$$\Omega_0 = \{(x, y) | p(x, y, t) = 0\} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\theta) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}h\theta\right) = \text{div}(h^3 \nabla p) \quad \text{sur } \Omega = \Omega_+ \cup \Omega_0 \quad (2.22)$$

$$\theta = 1 \text{ et } p > 0 \quad \text{sur } \Omega_+ \quad (2.23)$$

$$\theta \in]0, 1[\text{ et } \bar{p} = 0 \quad \text{sur } \Omega_0 \quad (2.24)$$

$$p(0, y, t) = 0 \quad (2.25)$$

$$p(L, y, t) = p_a \quad (2.26)$$

$$p(x, 0, t) = p(x, B, t) \quad (2.27)$$

$$\frac{h^3}{2} \frac{\partial p}{\partial n} = (1 - \theta^-)h[u_n - q_n] \quad \text{sur la frontière } \Sigma = \Omega_+ \cap \Omega_0 \quad (2.28)$$

Les forces de frottements adimensionnées des équations (2.18)-(2.19) sont :

$$\begin{aligned} F_{\text{frottement hydro}} &= L_c^2 \iint_{\Omega} \frac{V\mu}{l_p} \left(3 \cdot h \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{u\theta}{h} \right) dx dy \\ &= \frac{l_p}{6 \cdot L_c} F_{\text{adim}} \iint_{\Omega} \left(3 \cdot h \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{u\theta}{h} \right) dx dy \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$F_{\text{frottement de contact}} = F_{\text{adim}} \mu_s F_{\text{contact}} \quad (2.30)$$

$$F_{\text{total}} = F_{\text{frottement de contact}} + F_{\text{frottement hydro}} \quad (2.31)$$

Le coefficient de frottement est :

$$f_{ft} = \frac{F_{\text{total}}}{F_{\text{imposée}}} \quad (2.32)$$

2.2.2 Discrétisation

La discrétisation de l'équation de l'équilibre des forces est faite en utilisant un schéma de Newmark.

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = F_{\text{imposée}}(t) + F_{\text{hydro}}(t) + F_{\text{contact}}(t)$$

La position du segment au temps t^n est alors :

$$X^n = X^{n-1} + \Delta t U^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2M} (F_{\text{imposée}}(t^n) + F_{\text{hydro}}(t^n) + F_{\text{contact}}(t^n)) \quad (2.33)$$

avec l'expression de la vitesse :

$$U^{n-1} = U^{n-2} + \frac{\Delta t}{M} (F_{\text{imposée}}(t^{n-1}) + F_{\text{hydro}}(t^{n-1}) + F_{\text{contact}}(t^{n-1})) \quad (2.34)$$

La discrétisation nécessaire à la résolution des forces du système demande le maillage de l'espace. L'espace $\Omega = (0, L) \times (0, B)$ est ainsi maillé par des pavés réguliers de taille $\Delta x \times \Delta y$.

Où :

2.2. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME HYDRODYNAMIQUE

- N_1 : le nombre de points dans le sens du déplacement
- N_2 : le nombre de points dans le sens perpendiculaire au déplacement
- $\Delta x = \frac{L}{N_1}$
- $\Delta y = \frac{B}{N_2}$

Le choix d'un modèle de type Upwind a été fait afin d'approcher la dérivée du premier ordre d'espace dans l'équation (2.2), ce type de discrétisation convenant bien au problème de type transport. La dérivée d'ordre 1 en x a pour discrétisation :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\theta h)(x_i, y_j, t^n) \simeq \frac{h_{i,j}^n \theta_{i,j}^n - h_{i-1,j}^n \theta_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad (2.35)$$

Une discrétisation classique des dérivées d'ordre 2 est adoptée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) (x_i, y_j, t^n) &\simeq \frac{1}{\Delta x} (h_{i+\frac{1}{2},j}^3 \frac{\partial p}{\partial x}_{i+\frac{1}{2},j}^n - h_{i-\frac{1}{2},j}^3 \frac{\partial p}{\partial x}_{i-\frac{1}{2},j}^n) \\ &\simeq \frac{1}{\Delta x} (h_{i+\frac{1}{2},j}^3 \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta x} - h_{i-\frac{1}{2},j}^3 \frac{P_{i,j}^n - P_{i-1,j}^n}{\Delta x}) \\ &= \frac{1}{2\Delta x^2} (h_{i,j}^3 P_{i+1,j}^n - h_{i-1,j}^3 P_{i,j}^n + h_{i+1,j}^3 P_{i+1,j}^n - h_{i,j}^3 P_{i,j}^n \\ &\quad - h_{i,j}^3 P_{i,j}^n + h_{i-1,j}^3 P_{i-1,j}^n - h_{i+1,j}^3 P_{i,j}^n + h_{i,j}^3 P_{i-1,j}^n) \\ &= \frac{1}{2\Delta x^2} \left(P_{i+1,j}^n (h_{i+1,j}^3 + h_{i,j}^3) \right. \\ &\quad \left. + P_{i,j}^n (-h_{i-1,j}^3 - 2h_{i,j}^3 - h_{i+1,j}^3) \right. \\ &\quad \left. + P_{i-1,j}^n (h_{i+1,j}^3 + h_{i,j}^3) \right) \end{aligned}$$

De même pour l'approximation de la dérivée en y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) (x_i, y_j, t^n) &\simeq \frac{1}{2\Delta y^2} \left(P_{i,j+1}^n (h_{i,j+1}^3 + h_{i,j}^3) \right. \\ &\quad \left. + P_{i,j}^n (-h_{i,j-1}^3 - 2h_{i,j}^3 - h_{i,j+1}^3) \right. \\ &\quad \left. + P_{i,j-1}^n (h_{i,j+1}^3 + h_{i,j}^3) \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

La discrétisation en temps est choisie de manière à avoir un problème implicite en (P, θ) à résoudre à chaque étape de temps :

$$\frac{\partial \theta h}{\partial t} \simeq \frac{\theta_{i,j}^n h_{i,j}^n - \theta_{i,j}^{n-1} h_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \quad (2.37)$$

Le problème discret s'écrit alors en 2D :

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{i,j}^n h_{i,j}^n - \theta_{i,j}^{n-1} h_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{u}{\Delta x} (h_{i,j}^n \theta_{i,j}^n - h_{i-1,j}^n \theta_{i-1,j}^n) = \\ \frac{1}{2\Delta x^2} \left(P_{i+1,j}^n [h_{i,j}^3 + h_{i+1,j}^3] + P_{i,j}^n [-h_{i-1,j}^3 - 2h_{i,j}^3 - h_{i+1,j}^3] + P_{i-1,j}^n [h_{i,j}^3 + h_{i-1,j}^3] \right) \\ + \frac{1}{2\Delta y^2} \left(P_{i,j+1}^n [h_{i,j+1}^3 + h_{i,j}^3] + P_{i,j}^n [-h_{i,j-1}^3 - 2h_{i,j}^3 - h_{i,j+1}^3] + P_{i,j-1}^n [h_{i,j}^3 + h_{i,j-1}^3] \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Auquel on associe les conditions :

$$0 \leq P_{i,j}^n \quad 0 \leq \theta_{i,j}^n \leq 1 \quad (2.39)$$

$$\text{si } P_{i,j}^n > 0 \text{ alors } \theta_{i,j}^n = 1 \quad (2.40)$$

Et les conditions aux limites du problème hydrodynamique :

$$\theta(0, y, t) = \theta_0 \quad (2.41)$$

$$P(0, y, t) = 0 \quad (2.42)$$

$$P(L, y, t) = P_a * P_{adim} \quad (2.43)$$

$$\frac{L_c^3}{l_p^2} \frac{h^3}{2} \frac{\partial p}{\partial n} = (1 - \theta)h[u_n - q_n] \quad (2.44)$$

2.2.3 Algorithme de résolution du problème hydrodynamique

Algorithme de principe

Les données initiales du problème sont :

- $h(x, y, t = 0)$: la position et la géométrie du segment et de la chemise au temps $t = 0$
- $F_{imposée}$
- $\theta(x, y, t = 0)$ et $P(x, y, t = 0)$: la quantité de lubrifiant ainsi que la pression au temps initial
- u : la vitesse relative du piston par rapport à la chemise

Ces conditions initiales permettent d'évaluer les forces du système et ainsi de déterminer le déplacement vertical du segment.

Le but de l'algorithme est de déterminer pour une position donnée de h , les forces engendrées par le contact et par la pression engendrée par la compression du fluide. L'évaluation de l'accélération et donc de la vitesse du segment est faite à l'aide des forces calculées. On a donc une nouvelle position du segment h , on peut alors continuer les itérations.(figure 2.6)

Calcul de la force hydrodynamique - Description de l'algorithme de résolution

L'équation (2.20) s'écrit sous la forme :

$$B_1 P_{i-1,j}^n + (B_2 + B_5) P_{i,j}^n + B_3 P_{i+1,j}^n + B_4 P_{i,j-1}^n + B_6 P_{i,j+1}^n + (A_1 + A_3) \theta_{i,j}^n + A_4 \theta_{i-1,j}^n = A_2 \theta_{i,j}^{n-1} \quad (2.45)$$

avec :

- A_i : terme de factorisation des P discrétisées
 - B_i : terme de factorisation des θ discrétisées
- $(\theta_{i,j}^n, P_{i,j}^n)$ sont calculés à partir d'une suite d'approximation $(\theta_{i,j}^{n,k}, P_{i,j}^{n,k})$ tel que :

$$(\theta_{i,j}^n, P_{i,j}^n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\theta_{i,j}^{n,k}, P_{i,j}^{n,k}) \quad (2.46)$$

Le système est initialisé par :

$$\theta_{i,j}^{n,0} = \theta_{i,j}^{n-1} \quad (2.47)$$

$$P_{i,j}^{n,0} = P_{i,j}^{n-1} \quad (2.48)$$

où $(P_{i,j}^{n-1}, \theta_{i,j}^{n-1})$ sont connues.

2.2. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME HYDRODYNAMIQUE

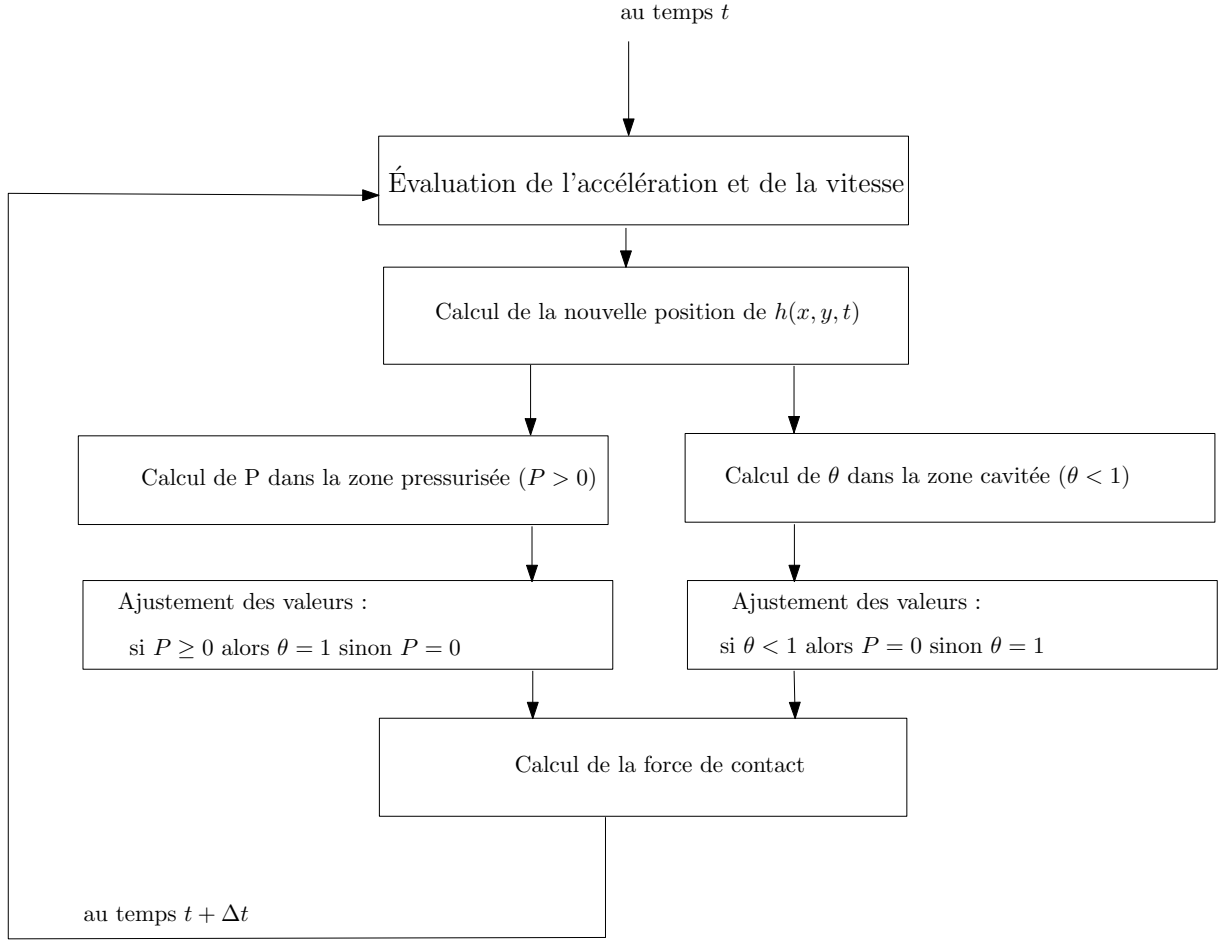


FIGURE 2.6 – algorithme de principe

Sur la zone $\Omega_{+,n-1}$ où $P^{n-1,0} > 0$ et $\theta^{n-1,0} = 1$, on résout l'expression de la pression pour θ fixé :

$$P_{ij}^{n,k+1} = (1 - \omega_R)P_{ij}^{n,k} - \frac{\omega_R}{(B_2 + B_5)} \left(B_1 P_{i-1,j}^{n,k} + B_3 P_{i+1,j}^{n,k} + B_4 P_{i,j-1}^{n,k} + B_6 P_{i,j+1}^{n,k} \right. \\ \left. + (A_1 + A_3)\theta_{ij}^{n,k} + A_2 \theta_{ij}^{n-1,k} + A_4 \theta_{i-1,j}^{n,k} \right) \quad (2.49)$$

où :

- ω_R : le terme de relaxation pour P .
- k : le nombre d'approximation de P^n

Sur la zone $\Omega_{0,n-1}$ où $P^{n-1,0} = 0$ et $\theta^{n-1,0} < 1$, on résout l'expression en θ à pression fixée :

$$\theta_{ij}^{n,k+1} = (1 - \omega_{R2})\theta_{ij}^{n,k} - \frac{\omega_{R2}}{(A_1 + A_3)} \left(B_1 P_{i-1,j}^{n,k} + (B_2 + B_5)P_{ij}^{n,k} + B_3 P_{i+1,j}^{n,k} + B_4 P_{i,j-1}^{n,k} + B_6 P_{i,j+1}^{n,k} \right. \\ \left. + A_2 \theta_{ij}^{n-1,k} + A_4 \theta_{i-1,j}^{n,k} \right) \quad (2.50)$$

où :

- ω_{R2} : le terme de relaxation pour θ .

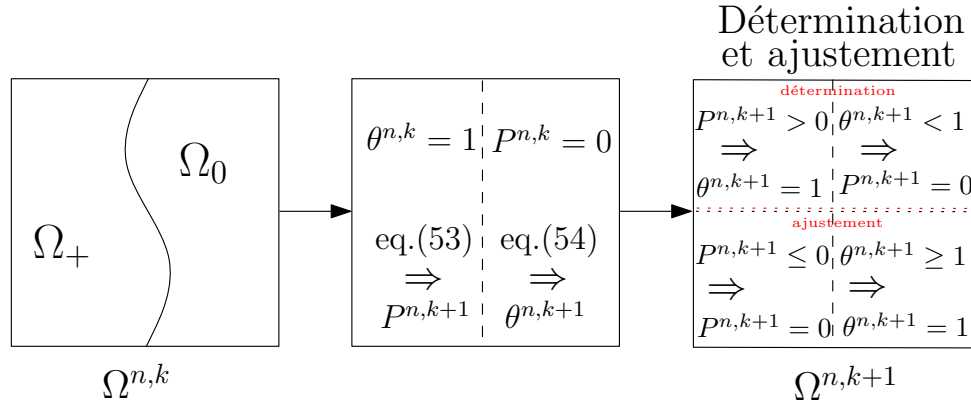


FIGURE 2.7 – Détermination et ajustement des variables pour une itération

A chaque approximation de $(\theta_{i,j}^{n,k+1}, P_{i,j}^{n,k+1})$, on vérifie que $P_{i,j}^{n,k+1} \geq 0$ et $\theta_{i,j}^{n,k+1} \in [0, 1]$ si ce n'est pas le cas alors on corrige de la manière suivante (figure 2.7) :

- si $P_{i,j}^{n,k+1} > 0$ alors $\theta_{i,j} = 1$ sinon $P_{i,j} = 0$.
- si $\theta_{i,j}^{n,k+1} < 1$ alors $P_{i,j} = 0$ sinon $\theta_{i,j} = 1$.

La résolution de θ et P se fait par approximation à chaque pas de temps, en corrigeant à chaque itération les variables P et θ , afin qu'elles restent dans leur domaine de définition et pour résoudre la bonne équation sur le bon domaine.

2.3 Prise en compte de la géométrie réelle

On dispose d'un échantillon des hauteurs d'un élément de surface S_1 (typiquement un carré d'environ 2 mm de côté avec 10^6 points) que l'on considère caractéristique de la surface totale. S_1 est pris comme représentant de la surface Ω sur laquelle on résout les équations de l'hydrodynamique (2.46) et du contact (1.11).

Pour un segment les dimensions de Ω sont une longueur $L=6mm$ et une largeur $B=2mm$, pour 3 segments la longueur est $L=25mm$.

On veut conserver pour Ω les mêmes caractéristiques géométriques que pour (S_1) en particulier l'orientation des vallées. La surface Ω devra être décrite par un nombre limité de points (480x80) compte-tenu des capacités de mémoire et des temps de calcul. De plus cette description devra varier au cours du temps pour modéliser le déplacement des segments car dans le code de calcul, les segments sont considérés fixes et la surface de la chemise mobile.

2.3.1 Aspect Recouvrement Générique

Un recouvrement de Ω par périodicité translation, à partir de la surface S_1 conduit à modifier l'aspect général (figure 2.8), en introduisant des "discontinuités" dans les vallées.

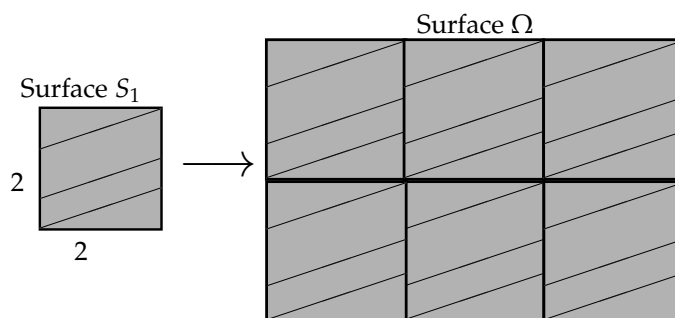


FIGURE 2.8 – Recouvrement de Ω avec une seule translation

Il convient alors de décaler le recouvrement pour conserver l'aspect initial en utilisant un double décalage à la fois en x et en y . (figure 2.9)

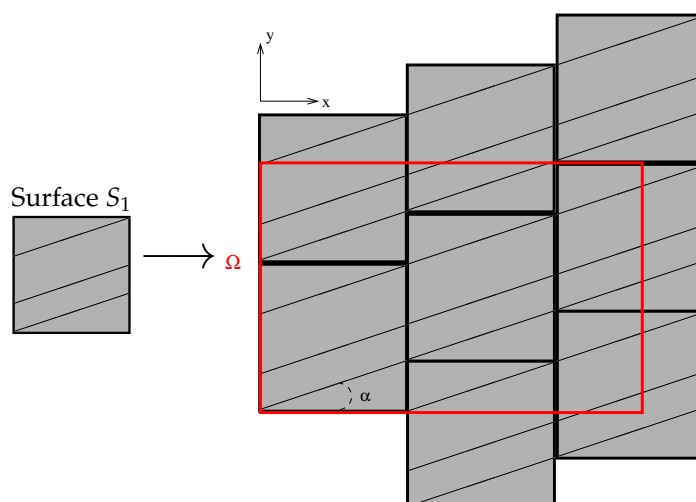


FIGURE 2.9 – Recouvrement avec deux translations

Ce procédé dit “générique” n’est valable que si les vallées ne recoupent pas les bords verticaux de S_1 (en pratique l’angle α des vallées par rapport à l’axe x est de l’ordre de 25 degré).

On obtient alors une géométrie globale qui conserve les caractéristiques générales mais qui n’est pas continue aux frontières. Pour supprimer cette discontinuité, nous faisons la moyenne des deux rangées situées de part et d’autre des frontières de recollement.

Cependant cette méthode n’a pas pu être appliquée à certains échantillons fournis par Renault. Nous avons alors mis en place une approche “manuelle” qui tient compte de l’existence d’un “motif” et qui sera détaillé dans la section 3.2

2.3.2 Aspect stockage

L’échantillon S_1 est donné sous la forme d’un tableau de taille 1 000 x 1 000 points. On effectue un traitement préliminaire de ce tableau de façon à décrire S_1 de manière anisotrope afin que le rapport entre

le nombre de points horizontaux/verticaux soit égal au rapport des longueurs $\frac{L}{B}$ de Ω (par exemple $1440 \times 240 = 3[480 \times 80]$). Le nouveau tableau obtenu est noté S'_1 .

La moyenne aux frontières décrite dans la section 2.3.1 s'effectue à partir de la surface S'_1 .

La moyenne s'effectue sur les 2 rangées de points des frontières. Une telle zone a été choisie car la dérivée seconde de la pression est discrétisée sur 3 points, et ainsi elle ne subira pas de variations brutales. (figure 2.10)

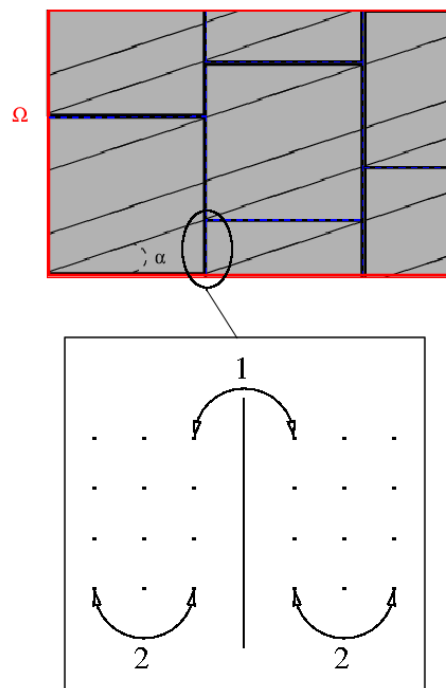


FIGURE 2.10 – Élimination des discontinuités entre deux duplications

Cette moyenne s'effectue en deux étapes :

- 1- les points des frontières sont remplacés par leur moyenne avec les points de la frontière de la surface adjacente
- 2- les points précédant ceux de la frontière sont remplacés par la moyenne de leur voisin dans le sens perpendiculaire à la frontière.

Pour chaque temps, il faut réévaluer la surface $\Omega(t)$ pour laquelle on va résoudre les équations de l'hydrodynamique et du contact. Les coordonnées des sommets de $\Omega(t)$ sont repérées par rapport à un repère fixe (d'origine $x = 0, y = 0$, pour $t = 0$) ce qui permet de connaître la surface en n'importe quel point de $\Omega(t)$. (figure 2.11) Cependant ceci représente un nombre de variables trop important à résoudre dans notre système. La longueur L de $\Omega(t)$ peut aller de 6 mm pour un segment comme le coupe-feu, à 25 mm pour les trois segments (soit 13 fois l'échantillon S_1). On effectue donc un processus de "lissage" afin d'extraire de la surface $\Omega(t)$ décrite à partir de S'_1 par une surface avec un nombre limité de points (typiquement 480×80).

La hauteur est calculée en chacun des nouveaux points de discrétisation en prenant les 3 points voisins

2.4. PROBLÈME DE CONTACT POUR UNE GÉOMÉTRIE RÉELLE

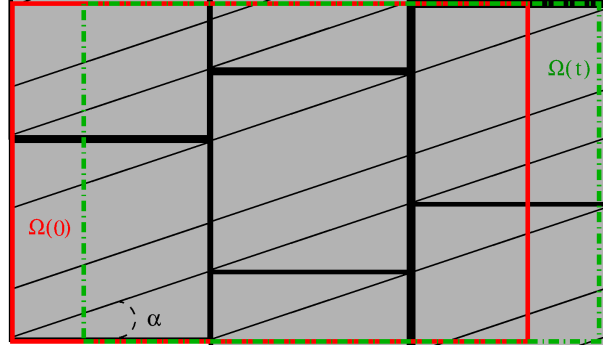


FIGURE 2.11 – Évaluation de Ω à $t = 0$ et à $t = n_t \Delta t$

du recouvrement généré par double translation puis régularisation au bord de S'_1 . À l'aide de ces points, on obtient l'évaluation de la hauteur en se servant des coordonnées barycentriques. La procédure est renouvelée à chaque pas de temps.

Le stockage des données en mémoire est optimisé en conservant uniquement S'_1 et la translation. Le coût de calcul d'évaluation des hauteurs en chaque pas de temps est négligeable.

2.4 Problème de contact pour une géométrie réelle

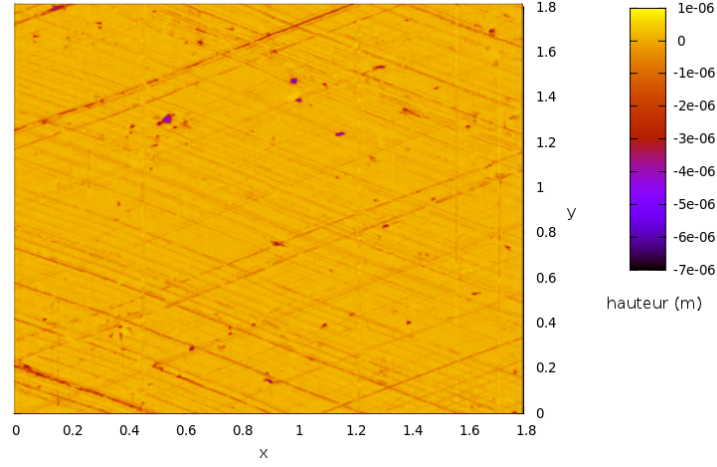
Comme il a été vu dans la remarque de la section 1.11, le choix d'un plan moyen ne prenant en compte que les rugosités de plateau est fondamental pour l'utilisation de la formule de Greenwood-Tripp-Williamson (section 1.11). De plus les géométries réelles ne vérifient pas les hypothèses de la théorie de Greenwood-Tripp-Williamson. Les auteurs sont donc souvent conduits à choisir au mieux les valeurs des paramètres afin d'obtenir des résultats réalistes.

En pratique, on utilise la courbe d'Abbott-Firestone décrite Figure 1.13 pour définir les paramètres (σ et H_2) de la formule de Greenwood-Tripp-Williamson.

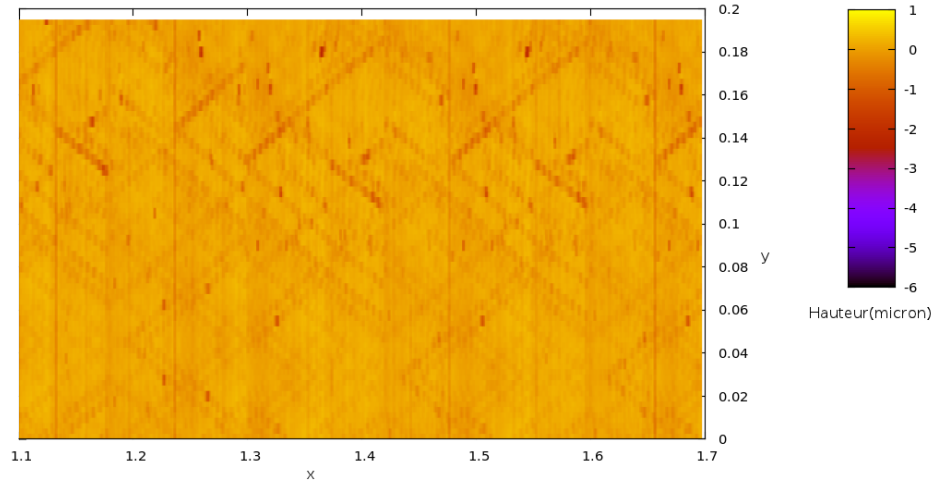
Nous donnons ci-dessous deux exemples de géométrie à partir desquelles sont définis des paramètres classiques :

- le premier exemple est proche des surfaces utilisées par Renault (figure 2.13). Il met en évidence une zone de plateaux et fait apparaître un paramètre caractéristique R_{pq} . L'utilisation de ce paramètre suppose que l'indice R_{vq} définissant la répartition gaussienne des vallées soit 5 fois plus grande que R_{pq} . (norme ISO 13565-3)
- le second exemple est issu de la définition de la norme ISO 13 565. Les pics et les creux sont relativement isolés séparés par une zone appelée "noyau" assez importante (figure 2.14). La zone de plateau est peu apparente. Le paramètre caractéristique est alors R_{pk} .

Ces valeurs R_{pk} et R_{pq} sont souvent prises comme valeur du paramètre σ de la loi de Greenwood-Tripp-Williamson.



(a) Surface S_1 de la chemise de type L_1 (1 000x1 000 points)



(b) $\Omega(t)$ obtenue à partir de la surface L_1 (480x80 points)

FIGURE 2.12 – Aperçu de la méthode de recouvrement

2.4.1 Quelques exemples de constantes utilisées

Les constantes utilisées dans les codes de calcul présentent une grande variabilité. Nous donnons ici quelques exemples (voir aussi Tomanik [TCT03] page 2). Notons que dans la plupart des cas, les constantes σ utilisées sont obtenues directement à partir des courbes d'Abbott sans que les plans moyens associés ne soient précisés.

Le paramètre R_{pq} a l'avantage d'être caractéristique d'une surface de la "région des plateaux" qui possède une répartition gaussienne des aspérités.

Les estimations des paramètres β et η présentées pour la surface Renault L1 ont été réalisées à l'aide des formules de Robbe-Valloire [FRV01] en fonction des paramètres de rugosité R , AR , SAR . Ces paramètres R , AR , SAR ont été calculés sur toute la surface L_1 , et non sur la partie "gaussienne" des plateaux, cela peut expliquer la non cohérence des résultats obtenus par rapport à ceux de Tomanik. Récemment ces

2.4. PROBLÈME DE CONTACT POUR UNE GÉOMÉTRIE RÉELLE

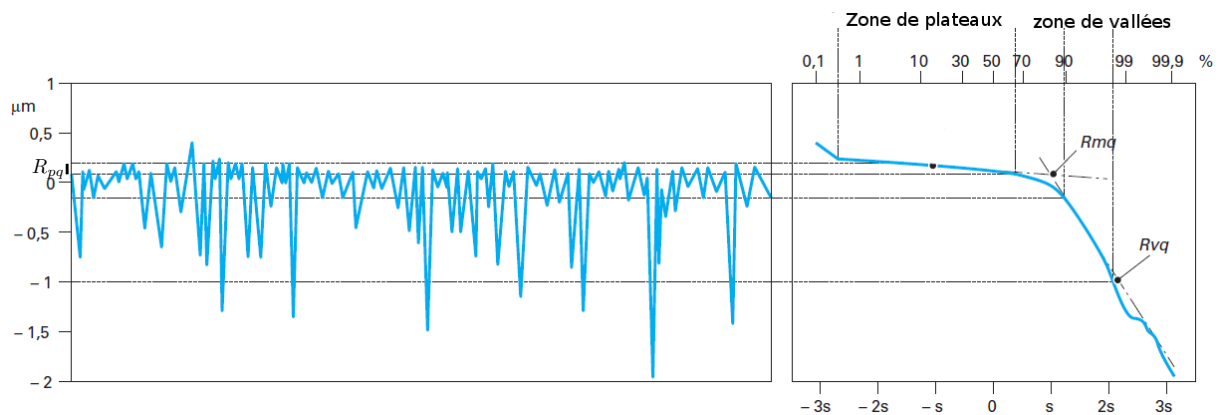


FIGURE 2.13 – à gauche, vu d'un profil de chemise ; à droite la courbe d'Abbott associée

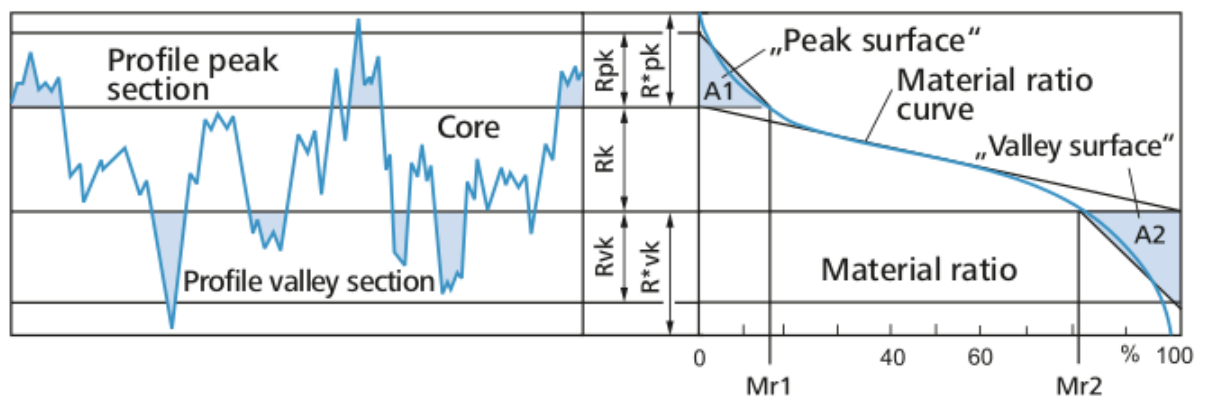


FIGURE 2.14 – Visualisation des paramètres statistiques de la norme ISO 13 565

paramètres ont été réévalués en excluant au mieux les vallées, les valeurs obtenues sont certes plus proches de celle de Tomanik, mais le décalage sur les grandeurs de la constante KT subsiste. Sur la surface L1 rodée, le rayon moyen de pic β est de l'ordre de $25\mu m$, valeur cohérente avec celle utilisée par Tomanik.

Remarque 1 : Un autre exemple montrera la difficulté d'obtenir des paramètres caractéristiques de toute la surface de la chemise. Pour une surface (Renault type L1), un calcul direct (à partir de la surface complète) montre un $\sigma = R_a = 0.22\mu m$, alors que le $\sigma = R_{pq}$ (σ des plateaux) mesuré donne une valeur de $0.074\mu m$ pour une surface de $16mm$ de long et $0.053\mu m$ pour une surface de $2mm$ de long.

Le choix de la constantes KT est primordial car il gouverne l'équilibre entre les forces de contact et les forces hydrodynamiques. De manière simplifiée, on peut dire qu'une valeur élevée de KT amplifie les forces de contact et fera qu'elles interviendront avant que les surfaces soient très rapprochées.

À titre indicatif, la valeur de la constante KT utilisée en interne par Renault dans un code de lubrification (code Renault) vaut $KT = K * E'$ avec $K = 2.38e^{-3}$ et $E' = 0.63e^{11} Pa$ ou $0.77e^{11} Pa$. On a donc $KT = 1.5e^8 Pa$ ou $1.8e^8 Pa$. Ces valeurs sont du même ordre que celles obtenues par Tomanik [TPZ11].

	$\sigma(m)$	$\beta(m)$	$\eta(m^{-2})$	$\eta\beta\sigma$	K_{GW}
Greenwood-Tripp-Williamson				estimée	estimée
Tomanik	R_{pk}	mesurée	mesurée		
Renault L1 rodée ($2mm \times 2mm$)	R_{pq}	calculée avec RV[FRV01]			
Renault L1 rodée ($16mm \times 1mm$)	R_{pq}				

	$\sigma(m)$	$\beta(m)$	$\eta(m^{-2})$	$\eta\beta\sigma$	$K_{GW}(kgf/cm^2)$	$KT(Pa)$
Greenwood-Tripp [GT71]				0.05	1000	$2.5E^7$
Tomanik [TCT03, TPZ11]	$2.5E^{-7}$	$13.1E^{-6}$	$3.5E^{10}$	0.115	14929	$8.6E^8$
Jai-Organisciack [Org07]				0.5	263290	$6.49E^{10}$
Renault L1($2mm \times 2mm$)	$5.3E^{-8}$	$2.2E^{-3}$	$74.16E^6$	0.0087	40	$2.9E^5$
Renault L1($16mm \times 1mm$)	$7.4E^{-8}$	valeurs de L1($2mm \times 2mm$)		0.0121	74	$4E^5$
Code lubrification Renault						$2.4E^8$

TABLE 2.1 – Les valeurs des constantes du modèle de Greenwood-Tripp pour un module de Young composite $E' = 1.e^{11}$

2.4.2 Procédure de détermination du plan moyen

Comme nous l'avons vu précédemment, la valeur du plan moyen n'est pas souvent explicitée. Nous avons défini une procédure afin de la choisir à partir de la connaissance d'un σ_{exp} de telle manière que la relation de Greenwood-Tripp-Williamson soit respectée.

L'idée est de définir à partir d'une surface réelle $z = h_1(x)$ une nouvelle surface fictive obtenue en supprimant des vallées ou des pics de telle manière que cette surface fictive vérifie la définition de Greenwood-Tripp-Williamson avec l'hypothèse que le contact est principalement supporté par les plateaux.

La surface fictive sera associée à un plan moyen $H3$ "d'altitude" Z^* à définir.

Deux approches ont été envisagées, l'une fournissant une solution stable unique qui semble plus adaptée à une donnée $\sigma_{exp} = R_{pk}$, la seconde pour laquelle il est difficile d'obtenir une solution unique mais qui serait mieux adaptée à une donnée $\sigma_{exp} = R_{pq}$. Les résultats numériques présentés correspondent à une surface Renault type L1 à partir d'un échantillon S_1 (900x900 points) pour différents σ_{exp} et à la surface totale $\Omega(t)$ (figure 2.4).

Les σ expérimentaux utilisés sont :

- $\sigma_{exp} = R_{pq} = 0.08$: coefficient calculé pour la surface filtrée avec un filtre "Gaussien robuste"
- $\sigma_{exp} = R_{pq} = 0.074$: coefficient calculé pour la surface Renault L1 ($16mm \times 2mm$)
- $\sigma_{exp} = R_{pk} = 0.053$: coefficient utilisé dans le code Renault

Procédure éliminant les vallées

a) Principe Pour chaque ordonnée Pz comprise entre $\min h_1(X)$ et $\max h_1(X)$ et pour chaque valeur d'un paramètre de troncature ℓ , on considère la surface tronquée :

$$S = \{z = \max(Pz - \ell, h_1(X))\} \quad (2.51)$$

Pour cette surface, on calcule :

2.4. PROBLÈME DE CONTACT POUR UNE GÉOMÉTRIE RÉELLE

- un plan moyen $H3$

$$H3 = \sqrt{\int_S z^2(x) dx} \quad (2.52)$$

- un écart type $\sigma_{(Pz, \ell)} = \sqrt{\int_S (z^2 - H3)^2 dz}$ que l'on compare à la valeur expérimentale σ_{exp} .

On cherche alors le couple (Pz, ℓ) qui minimise l'erreur :

$$\text{Erreur}(Pz, \ell) = \frac{|\sigma_{(Pz, \ell)} - \sigma_{exp}|}{\sigma_{exp}} \quad (2.53)$$

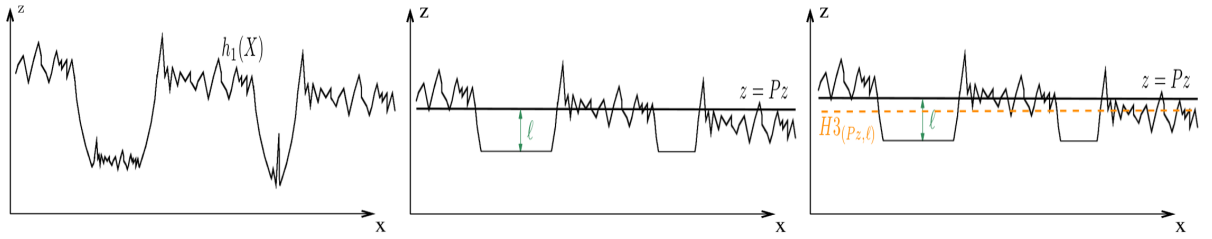


FIGURE 2.15 – Description de la sélection des surfaces en fonction de (Pz, ℓ) par élimination des vallées

b) Cas de l'échantillon S_1 L'échantillon S_1 est d'abord considéré avec le paramètre $\sigma_{exp} = 0.053$. La procédure d'élimination des vallées est appliquée pour un $Pz \in [H_2, \max h_2]$ et $\ell \in [0, 0.35]$, où $0.35 > 4 \max(\sigma_{exp})$ ($h_2(x, y)$ est la fonction définissant la surface et H_2 est le plan moyen de cette surface). La figure 2.16 représente l'erreur en fonction de Pz et de ℓ en ne retenant que les erreurs inférieures à 10%.

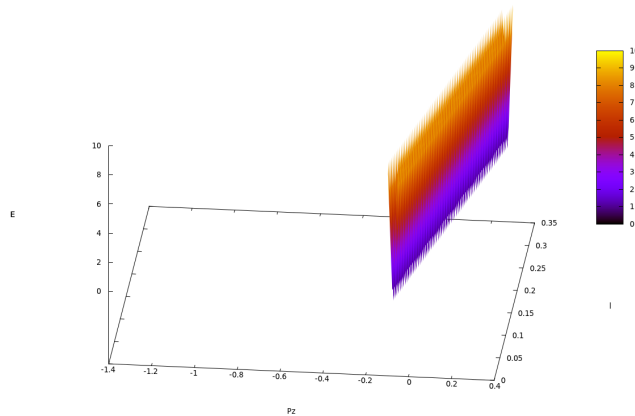
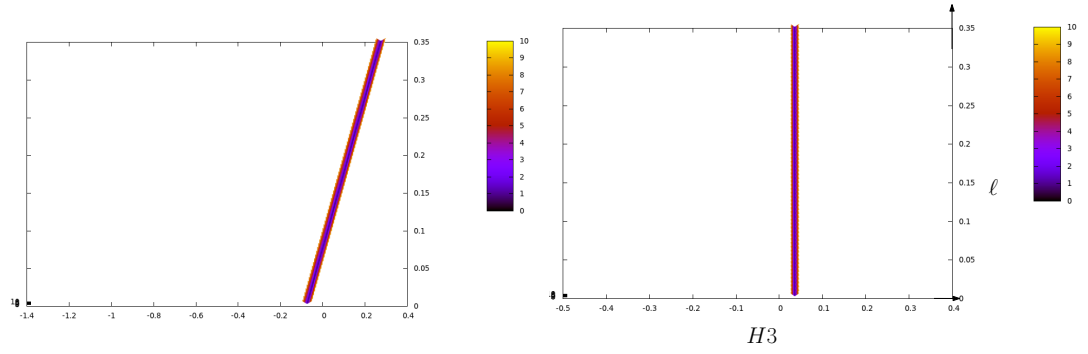


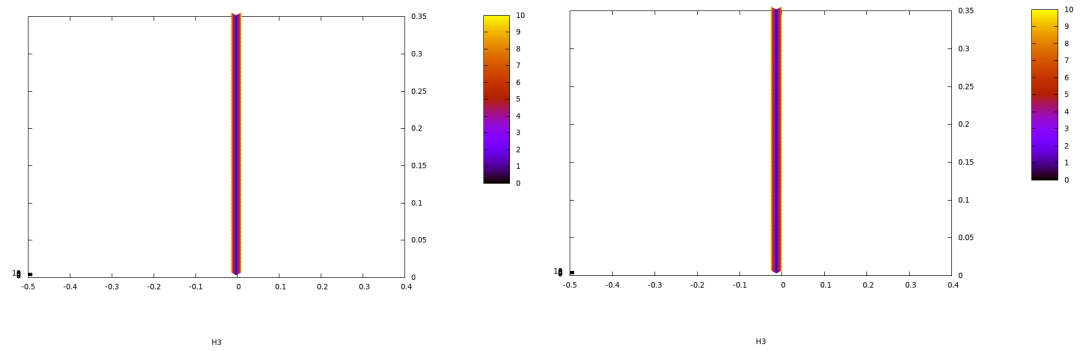
FIGURE 2.16 – Erreur (Pz, ℓ) en fonction de Pz et de ℓ pour un seuil d'erreur de 10% pour $\sigma_{exp} = 0.053$

En observant le seuil d'erreur à moins de 10 % pour chaque valeur de Pz , on voit qu'il y a de nombreuses valeurs de ℓ optimales. Si l'on calcule les valeurs du plan moyen $H3$ associées données par la formule (2.52) pour ces valeurs de ℓ , on remarque qu'une seule valeur de $H3$ se dégage (voir table 2.2) (figure 2.17b).



(a) ℓ en fonction de Pz pour des seuils d'erreurs inférieures à 10% (b) $H3$ en fonction de ℓ pour des seuils d'erreurs inférieures à 10%

FIGURE 2.17 – Couple (Pz, ℓ) et $(H3, \ell)$ pour différentes plages d'erreur pour la surface S_1 avec $\sigma_{exp} = 0.053$



(a) Pour $\sigma_{exp} = 0.074$

(b) Pour $\sigma_{exp} = 0.08$

FIGURE 2.18 – $H3$ en fonction de ℓ pour des seuils d'erreur inférieure à 10% pour $\sigma_{exp} = 0.074$ et $\sigma_{exp} = 0.08$

Le même type de résultats est obtenu en prenant $\sigma_{exp} = 0.074$ ou $\sigma_{exp} = 0.053$ (figure 2.18) et le tableau 2.2 résume les valeurs obtenues.

Remarque 1 : Ce plan unique peut correspondre à plusieurs valeurs de ℓ ou de Pz , mais ceci n'a pas d'importance car ce qui apparaît dans la formule de Greenwood-Tripp-Williamson est $\frac{h}{\sigma}$, où h est calculé à partir du plan moyen.

c) Si l'on applique la méthode précédente à la géométrie $\Omega(0)$ obtenue par duplication de S_1 ($6 \times 2 \text{ mm}^2$ et 480×80 points) au temps initial, on obtient des résultats proches des précédents. (tableau 2.3)

2.4. PROBLÈME DE CONTACT POUR UNE GÉOMÉTRIE RÉELLE

$\sigma(\mu m)$	0.053	0.074	0.08
min Erreur(%)	0.16	0.11	0.01
$H3$	0.0361	-0.002	-0.0128

TABLE 2.2 – Plan moyen $H3$ obtenus pour différents σ_{exp} pour l'échantillon S_1

$\sigma(\mu m)$	0.053	0.074	0.08
min Erreur(%)	0.069	0.01	0.049
$H3$	0.034	-0.005	-0.015

TABLE 2.3 – Plan moyen $H3$ obtenus pour différents σ_{exp} pour la surface $\Omega(0)$

Procédure éliminant les vallées et les pics isolés

a) Principe On procède de la même manière que pour la procédure d'élimination des vallées mais on tronque à la fois les pics et les vallées.

Le surface fictive est défini par :

$$S = \{z = \begin{cases} h_1(x) & \text{si } Pz - \ell \leq h_1(X) \leq Pz + \ell \\ Pz - \ell & \text{si } h_1(X) < Pz - \ell \\ Pz + \ell & \text{si } h_1(X) > Pz + \ell \end{cases} \} \quad (2.54)$$

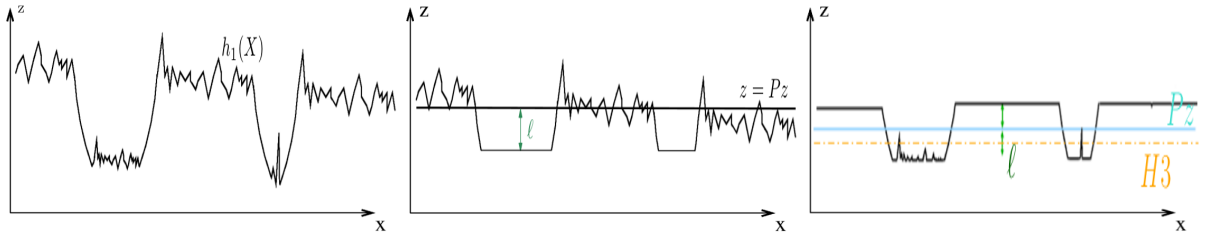


FIGURE 2.19 – Description de la sélection des surfaces en fonction de (Pz, ℓ) par élimination des vallées et des pics isolés

b) Résultat avec la surface S_1 L'échantillon S_1 est d'abord considéré avec le paramètre $\sigma_{exp} = 0.053$. La figure 2.20 représente l'erreur en fonction de Pz et de ℓ en ne retenant que les erreurs inférieures à 10%.

L'ensemble des points (Pz, ℓ) correspondant à la figure 2.20, est représenté en deux dimensions sur la figure 2.21a).

Pour chacune des erreurs des couples (Pz, ℓ) prises inférieures à 10%, les plans moyens $H3$ sont calculés à partir de la formule (2.52), puis représentés en fonction de ℓ sur la figure 2.21b).

On remarque que contrairement au cas où l'on élimine les seules vallées (figure 2.17), il n'est pas possible de définir un unique plan moyen. Les figures analogues 2.23 correspondant à des erreurs inférieures à 1% ou à 0.1% ne permettent pas de conclure clairement.

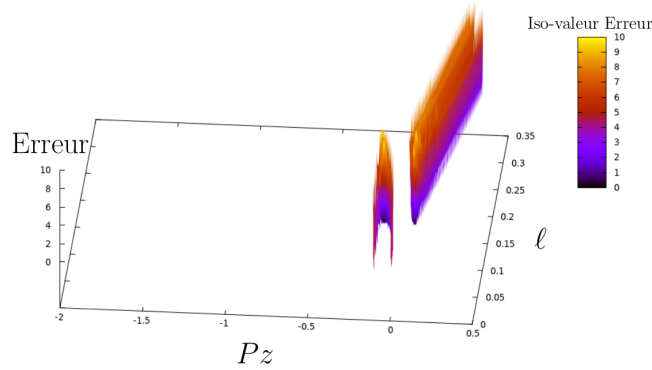


FIGURE 2.20 – $\text{Erreur}(Pz, \ell)$ en fonction de Pz et de ℓ pour $\sigma_{exp} = 0.053$ avec un seuil d'erreur de 10%

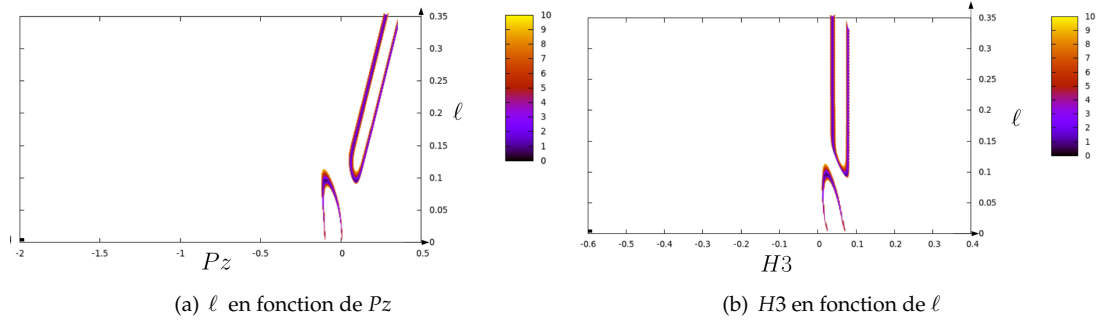


FIGURE 2.21 – Couple (Pz, ℓ) et $(H3, \ell)$ pour un seuil d'erreur de $< 10\%$ pour la surface S_1 avec $\sigma_{exp} = 0.053$

On obtient des résultats semblables pour $\sigma_{exp} = 0.074$ et $\sigma_{exp} = 0.08$, à la seule différence qu'il n'y a pas deux zones distinctes comme dans le cas $\sigma_{exp} = 0.053$. (figure 2.22)

Même en diminuant le seuil d'erreur, on ne voit pas apparaître un ensemble de valeurs pour lesquelles une zone $H3$ "optimaux" existe. (tableau 2.4) On obtient pour des seuils autour de 1% deux courbes qui se "discrétisent" sous la forme d'un ensemble de points lorsque l'on diminue le seuil d'erreur. (figure 2.23)

Les intervalles sur lesquelles on peut choisir un plan moyen ayant une erreur inférieure à 0.1% sont présentés dans le tableau 2.4.

$\sigma(\mu m)$	0.053	0.074	0.08
$H3$	[0.015, 0.08]	[−0.0017, 0.095]	[−0.011, 0.095]

TABLE 2.4 – Intervalles de plan moyen possible pour un seuil d'erreur $< 0.1\%$ pour S_1

Plus le paramètre de rugosité σ_{exp} est grand et plus l'intervalle sur lequel on peut choisir un plan moyen pour un seuil d'erreur inférieure à 0.1% est grand. Cet intervalle peut être diminué en prenant des erreurs plus petites comme le montre le tableau 2.5, mais on arrive aux limites de ce qui est réaliste.

2.4. PROBLÈME DE CONTACT POUR UNE GÉOMÉTRIE RÉELLE

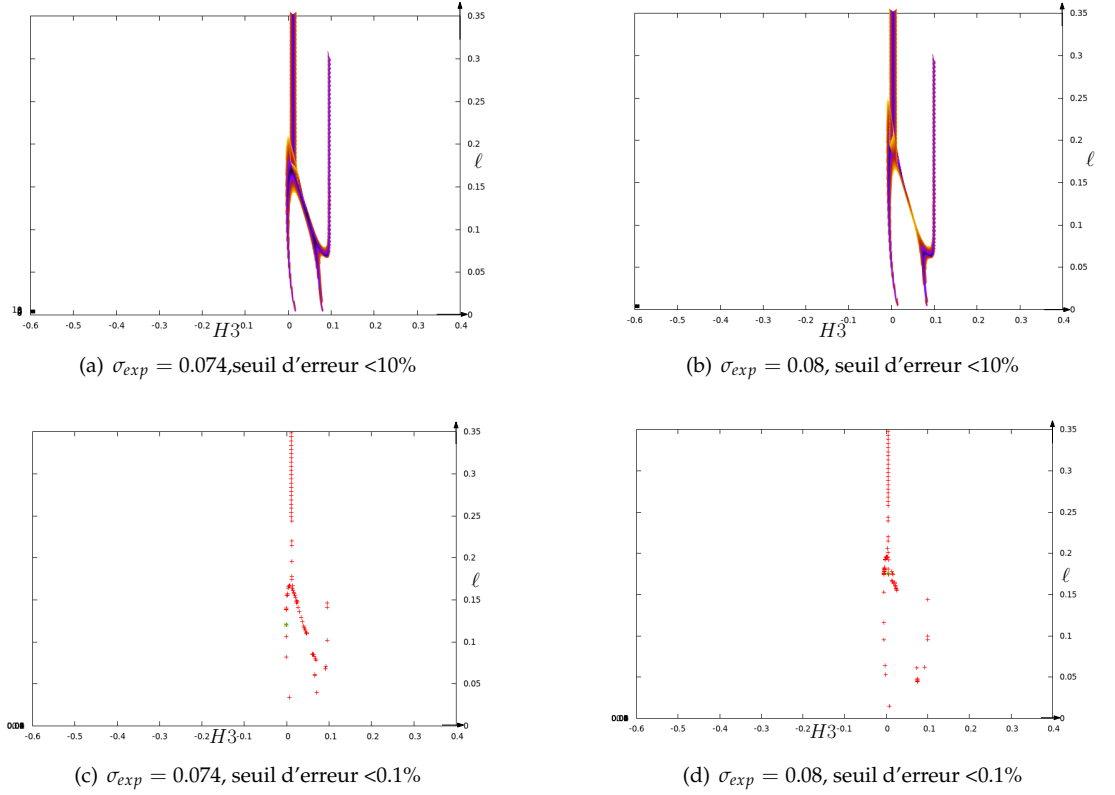


FIGURE 2.22 – Couple $(H3, \ell)$ pour des seuils d'erreurs inférieures à 10% et 0.1%

$\sigma(\mu m)$	0.053	0.074	0.08
$H3$	$\simeq 0.0388$	$[-0.0017, 0.041]$	$\simeq 0.052$

TABLE 2.5 – Intervalles de plan moyen possible pour un seuil d'erreur <0.01% pour S_1

Les plans moyens correspondant aux couples (Pz, ℓ) pour lesquelles l'erreur est la plus faible sont présentés dans le tableau (2.6)

c) De la même manière que précédemment, les calculs sont effectués à partir de la surface $\Omega(0)$.

Les mêmes courbes et les mêmes remarques peuvent être faites dans le cas de la surface $\Omega(0)$, pas de plan unique et un intervalle de plan moyen possible de longueur supérieure à celle de σ_{exp} , pour des erreurs "acceptables".

Les plans moyens correspondant aux couples (Pz, ℓ) pour lesquelles l'erreur est la plus faible sont présentés dans le tableau (2.9)

On remarque que contrairement au cas où l'on élimine les vallées seules, les résultats obtenus avec S_1 et ceux avec $\Omega(0)$ sont différents pour $\sigma_{exp} = 0.074$, mais ils sont relativement proches pour $\sigma_{exp} = 0.053$

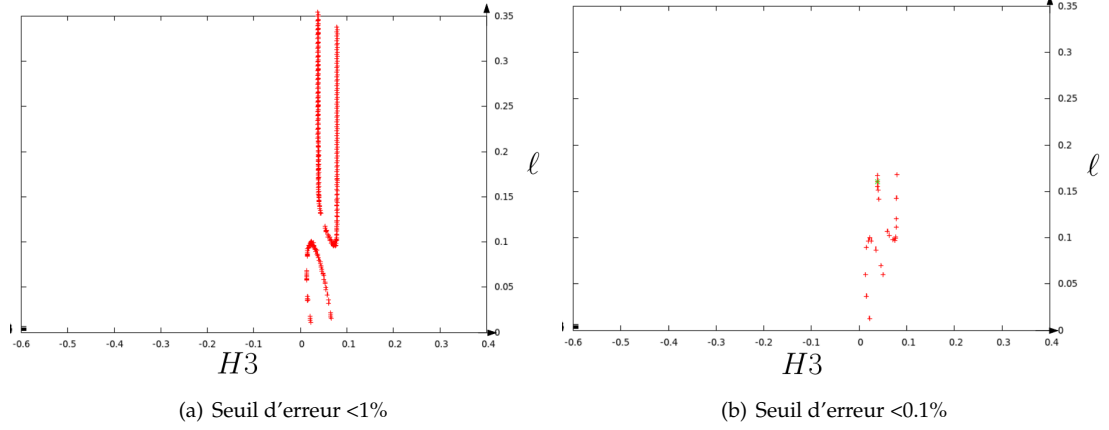


FIGURE 2.23 – Couple $(H3, \ell)$ pour un seuil d'erreur inférieur à 1% et à 0.1%, et le minimum global pour $\sigma_{exp} = 0.053$

$\sigma(\mu m)$	0.053	0.074	0.08
min Erreur(%)	0.0023	0.0003	0.0019
$H3$	0.0388	-0.0017	0.0052
Pz	0.089	-0.166	0.009
ℓ	0.158	0.12	0.176

TABLE 2.6 – Plans moyen correspondant à l'erreur minimale pour les différents σ_{exp} pour l'échantillon S_1

et $\sigma_{exp} = 0.08$.

Les conséquences du choix du plan moyen

Les résultats obtenus par cette méthode restent éloignés du résultat obtenu par les mesures effectuées par Renault sur l'échantillon S_1 .

Le plan moyen obtenu par les mesures est de 0.113 pour un $\sigma_{exp} = 0.074$. à comparer avec les valeurs suivantes obtenues par le calcul avec les diverses hypothèses précédentes :

Les conséquences peuvent être importantes vis-à-vis de l'intensité de la force de contact. La pression de contact a été calculée pour chacun de ces différents cas, pour la constante KT de Tomanik (cf tableau 2.1), pour un segment plat dont le plan moyen est à l'altitude $z = 0.15$. La pression de contact s'exprime alors :

$$P_{\text{contact}}\left(\frac{h}{\sigma}\right) = 8.6e^8 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{h}{\sigma}}^{\infty} \left(u - \frac{h}{\sigma}\right)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (2.55)$$

On remarque que pour une hauteur $z = 0.15$, il y a un rapport 50 entre la force de contact pour le plan moyen donné par Renault et celui calculé par élimination des vallées. Cette différence est moins grande

2.4. PROBLÈME DE CONTACT POUR UNE GÉOMÉTRIE RÉELLE

$\sigma(\mu m)$	0.053	0.074	0.08
$H3$	[0.013, 0.079]	[0.0002, 0.095]	[-0.003, 0.098]

TABLE 2.7 – Intervalles de plan moyen possible pour un seuil d'erreur <0.1% pour $\Omega(0)$

$\sigma(\mu m)$	0.053	0.074	0.08
$H3$		[0.0026, 0.07]	[-0.005, 0.003]

TABLE 2.8 – Intervalles de plan moyen possible pour un seuil d'erreur <0.01% pour $\Omega(0)$

pour la méthode qui élimine les vallées et les pics, mais le rapport entre les deux forces obtenues est dans le meilleur des cas de 3.5 Il est obtenu pour le plan le plus haut $H3 = 0.07$.

Ces grands écarts de l'intensité de la force de contact sont dus à l'expression exponentielle qui apparaît dans la formule (2.55) et qui est bien apparente figure 2.25.

Dans la suite, les forces de frottements ont été calculées pour 3 plans moyens différents pour la surface $L1$:

- $H3 = 0.113$, le plan moyen mesuré par Renault,
- $H3 = 0.05$, un plan moyen obtenu en tronquant pics et vallées, proche de celui obtenu pour $\sigma_{exp} = 0.074$ et sur la surface $\Omega(0)$, en prenant l'erreur minimum,
- $H3 = -0.005$, le plan moyen obtenu en ne tronquant que les vallées pour la surface $\Omega(0)$, avec $\sigma_{exp} = 0.074$.

$\sigma(\mu m)$	0.053	0.074	0.08
min Erreur(%)	0.0124	0.0001	0.0007
$H3$	0.0366	0.07	0.003
Pz	0.104	0.024	-0.176
ℓ	0.176	0.044	0.206

TABLE 2.9 – Plans moyens correspondant à l’erreur minimale pour les différents σ_{exp} pour la surface $\Omega(0)$

		$H3$	
		S_1	$\Omega(0)$
élimination vallées	solution	-0.002	-0.005
élimination vallées pics	seuil d’erreur < 0.01%	[-0.0017, 0.041]	[0.0026, 0.07]
	erreur minimale	-0.0017	0.07

TABLE 2.10 – Plans moyens calculés pour S_1 et $\Omega(0)$ avec $\sigma_{exp} = 0.074$

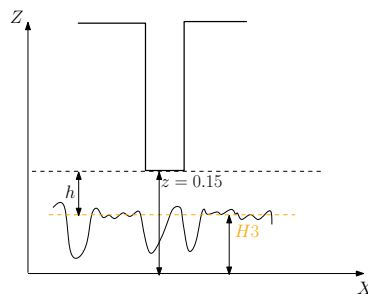


FIGURE 2.24 – Représentation des paramètres $h, H3$ dans le cas segment plat-chemise

		$P_{contact}(Pa)$	
		S_1	$\Omega(0)$
élimination vallées		$3.93e^6$	$3.5e^6$
élimination vallées pics	seuil d’erreur < 0.01%	$[3.93e^6, 2.07e^7]$	$[4.93e^6, 5.81e^7]$
	erreur minimale	$3.93e^6$	$5.81e^7$
Plan Renault $H3 = 0.113$		$2.07e^8$	

TABLE 2.11 – Pressions de contact calculées sur S_1 et $\Omega(0)$ avec $\sigma_{exp} = 0.074$ pour une position $z = 0.15$ du segment plat

2.4. PROBLÈME DE CONTACT POUR UNE GÉOMÉTRIE RÉELLE

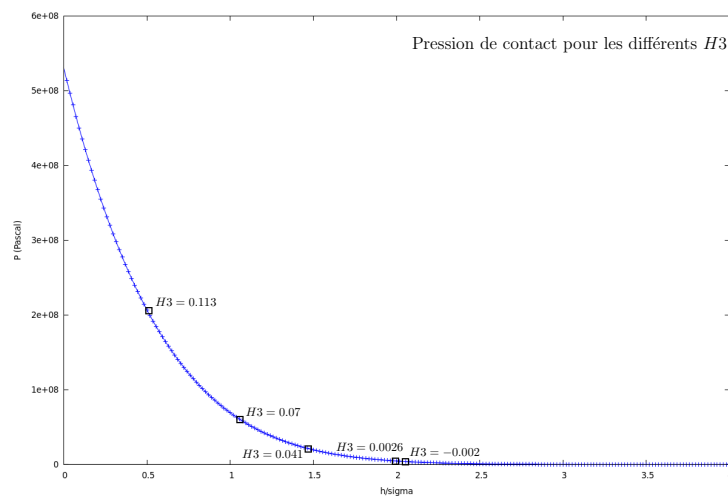


FIGURE 2.25 – Pression de contact pour la constante KT de Tomanik en fonction de $\frac{h}{\sigma}$ pour une position $z = 0.15 \mu m$ du segment plat

CHAPITRE 3

RÉSULTATS DU MODÈLE ($P - \theta$) AVEC DES SURFACES RÉELLES

Le but de la thèse est de mettre au point un programme permettant de classer les performances tribologiques de différentes topologies de surfaces de chemises d'un moteur automobile. Les méthodes utilisées pour atteindre ce but ont été expliquées dans les chapitres précédents. Nous allons maintenant présenter une étude de sensibilité des différents paramètres intervenant dans le modèle, ces résultats sont comparés à des résultats expérimentaux obtenus sur tribomètres.

3.1 Paramètres de calcul

Tous les résultats présentés sont obtenus pour un état stabilisé, et pour une vitesse de déplacement relative du segment par rapport à la chemise de 10m.s^{-1} .

Pour cette étude, nous disposons de 2 types de surfaces de chemises différentes (figure 3.1) :

- L1 : surface d'un moteur de série (stries perpendiculaires aux sens de déplacement du segment)
- L3 : surface usinée avec un nouveau processus de fabrication appelé Helical slide honing (HSH) (stries dans le sens de déplacement du segment)

Ces surfaces sont issues de mesures effectuées par surfométrie optique. Le résultat est un maillage carré régulier de pas $2\mu\text{m}$, pour une surface de $2\text{mm} \times 2\text{mm}$. La courbure de la chemise mesurée est prise en compte dans les mesures qui nous sont fournies. Pour corriger les effets de ce redressement, plusieurs filtres peuvent être appliquées à la surface. Nous précisons lorsqu'un de ces filtres est utilisé car cela peut influencer la détermination du plan moyen servant dans le calcul de la force de contact. Parfois le redressement entraîne des déformations sur le bord de la surface. Pour éliminer ces dernières, la surface est tronquée tout autour de 50 points, soit 0.1 mm.

Toutes les surfaces présentées sont rodées. Nous faisons l'hypothèse que l'échantillon est représentatif de la rugosité générale de la chemise.

Pour chacune de ces surfaces, les angles des stries ont été mesurés. Ensuite le paramètre de rugosité $\sigma = R_{pq}$ décrivant la rugosité de plateau est déterminé par les outils de traitement du signal issus de la surfométrie. Enfin, le plan moyen correspondant à ces paramètres de rugosité est calculé. Les résultats issus des mesures sont présentés dans le tableau 3.1.

Nous avons fait varier les paramètres suivants :

3.1. PARAMÈTRES DE CALCUL

Surface	angles (°)	σ (μm)	plan (μm)
L1	50	0.053	0.113
L3	140	0.036	0.29

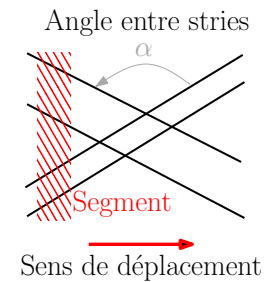
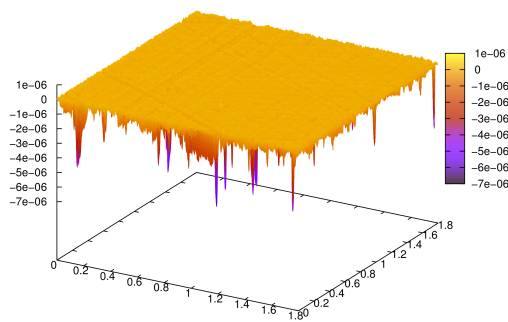
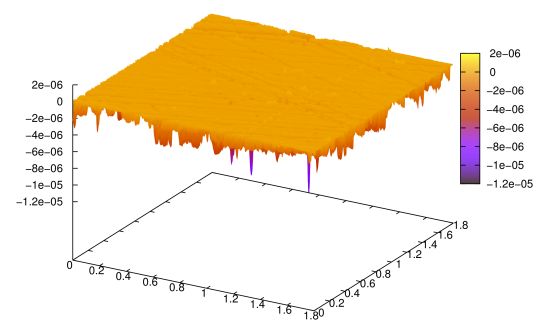


TABLE 3.1 – Résultats issus des mesures pour les échantillons de chemises mesurées



(a) L1



(b) L3

FIGURE 3.1 – Représentation des 2 échantillons fournis par Renault

- la “hauteur du film d’huile” en entrée (valeur du paramètre θh) :
 - $3 \mu m$
 - $2 \mu m$
 - $1 \mu m$
- la hauteur initiale du segment (ces résultats sont présentés en annexe, la hauteur prise dans ce chapitre est de $1 \mu m$) :
 - $5 \mu m$
 - $3 \mu m$
 - $1 \mu m$
- Le pas d’espace ($\Delta x, \Delta y$) :
 - $\Delta x = 10 \mu m, \Delta y = 6.5 \mu m$
 - $\Delta x = 6 \mu m, \Delta y = 3.2 \mu m$
- Le pas de temps Δt :
 - $2.5 \cdot 10^{-7} s$
 - $1.25 \cdot 10^{-7} s$
- la “hauteur” du plan moyen $H3$:
 - $-0.005 \mu m$
 - $0.05 \mu m$
 - valeurs calculées (tableau 3.5)
 - valeurs obtenues expérimentalement (tableau 3.1)
- la constante de la force de contact $C7 = \frac{KT}{E'}$, avec E' le module de Young composite :
 - $6.49E-1$, issue des valeurs de la thèse d’Organisciak [Org07]

- 2.4E-3, issue d'un code interne Renault
- 8.6E-3, issue des valeurs de Tomanik [TPZ11]
- 4.94E-6, calculée à l'aide des formules de Robbe-Valloire [FRV01] sur la surface L1
- $\sigma = R_{pq}$ (les résultats pour $\sigma = 0.074\mu\text{m}$ sont présentés en annexe) :
 - calculée sur l'échantillon de $2\text{mm} \times 2\text{mm}$ (pour L1 : $\sigma = 0.053\mu\text{m}$)
 - calculée sur l'échantillon de $16\text{mm} \times 2\text{mm}$ (pour L1 : $\sigma = 0.074\mu\text{m}$)

Pour accélérer la convergence dans le cas de la lubrification mixte, une masse plus importante est prise afin de stabiliser plus rapidement le système. En effet, l'accélération et donc la vitesse du système sera plus petite.

$$\gamma = \frac{\sum F}{M} \quad (3.1)$$

Les masses adimensionnées prises sont :

- la masse réelle du segment, calculée partir de sa masse linéique 0.038kg.m^{-1} , soit 1.58E-9
- une masse multipliée par 10 : 1.58E-8
- une masse multipliée par 100 : 1.58E-7

Les dimensions choisies pour ce problème sont :

Variable	Valeur	Nom
L_c	10^{-2} m	longueur
l_p	10^{-6} m	distance segment-chemise
V	10 m/s	vitesse relative du segment
μ_0	0.004 Pa.s	viscosité

TABLE 3.2 – Dimensionnement choisi

Les dimensions choisies (tableau 3.2) appliquées aux adimensionnements du problème définis subsection 2.2.1 donnent le tableau 3.3.

Variable	Expression	Valeur	Nom
t_{adim}	$\frac{L_c}{V}$	10^{-3} s	temps caractéristique
P_{adim}	$\frac{6 V L_c \mu_0}{l_p^2}$	$2.4 \cdot 10^9$ Pa	pression caractéristique
F_{adim}	$\frac{6 V L_c^3 \mu_0}{l_p^2}$	$2.4 \cdot 10^5$ N	force caractéristique
W_{adim} linéique	$\frac{6 V L_c^2 \mu_0}{l_p^2}$	$2.4 \cdot 10^7$ N/m	force linéique caractéristique
m_{adim} linéique	$\frac{6 L_c^4 \mu_0}{V l_p^3}$	$2.4 \cdot 10^7$ kg/m	masse linéique caractéristique
m_{adim}	$\frac{6 L_c^5 \mu_0}{V l_p^3}$	$2.4 \cdot 10^5$ kg	masse linéique caractéristique

TABLE 3.3 – Adimensionnement des variables du problème

Les résultats peuvent être synthétisés sous forme de courbes de Stribeck, obtenues en fixant la vitesse

3.2. OBTENTION DES SURFACES – UNE NOUVELLE APPROCHE

10 m.s^{-1} et la viscosité 0.004 Pa.s . Le nombre de Stribeck s'exprime par :

$$S = \frac{\bar{\mu} \bar{u}}{\bar{W}_a} \quad (3.2)$$

Donc en terme de variable adimensionnée, l'expression de la charge à appliquer pour un nombre de Stribeck S réel est donnée par :

$$W_a = \frac{\mu_0 V}{S W_{adim \text{ linéique}}} = \frac{l_p^2}{6 L_c^2} \frac{1}{S} = \frac{1}{6 S} 10^{-8} \quad (3.3)$$

Les forces imposées au système pour les calculs sont décrites dans le tableau 3.4.

S	6E-7	1E-6	3E-6	8E-6	1E-5	3E-5	7E-5	1E-4	2E-4
W_a	2.78E-3	1.67E-4	5.56E-4	2.08E-4	1.67E-4	5.56E-5	2.38E-5	1.67E-5	8.33E-6
\bar{W}_a (N/m)	66 666.7	40 000	13 333.3	5 000	4 000	1 333.3	571.4	400	200

TABLE 3.4 – Correspondance entre la force linéique appliquée W_a au segment et le nombre de Stribeck S

Nous avons introduit le paramètre \bar{k} , qui est l'espace minimal entre le segment et la chemise (figure 3.2). Quand le segment touche la chemise, nous découpons la surface rugueuse afin que la hauteur entre la chemise et le segment soit égale à \bar{k} .

Nous avons choisi \bar{k} suffisamment petit pour ne pas perturber les modèles mathématiques mais non nul pour conserver du lubrifiant entre les deux surfaces en mouvement, et garantir la validité du modèle de lubrification.

La valeur par défaut pour \bar{k} est de $0.01 \mu\text{m}$.

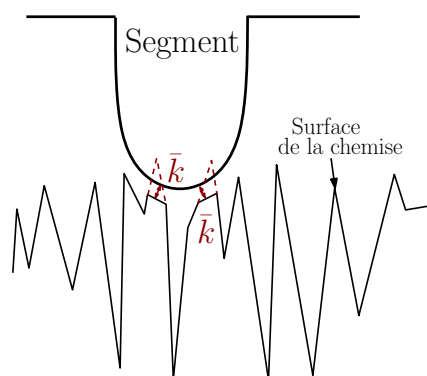


FIGURE 3.2 – Représentation de la variable \bar{k}

3.2 Obtention des surfaces – Une nouvelle approche

Dans la section 2.3, nous avons présenté une technique "générique" pour créer une surface "infinie" à partir d'un échantillon de taille $2\text{mm} \times 2\text{mm}$. Cependant cette approche ne permet pas dans le cas de

certaines échantillons d'obtenir un recollement correct d'un nombre suffisant de stries et de conserver ainsi l'allure générale de la texture.

Aussi nous proposons une technique basée sur l'existence d'un motif qui servira de base à la génération d'une surface infinie. Ceci sera particulièrement adapté à la surface L3. Pour cela, nous sommes partis d'un échantillon de base, sur lequel nous avons repéré un motif de type losange (exemple avec l'échantillon L3 figure 3.3(a)). Nous l'avons ensuite étendu par recollement pour avoir un motif qui puisse se répéter par simple translation. (figure 3.4(a)-3.4(b)).

Les axes des figures représentent le nombre de points de maillages. Le pas de maillage réel est de $2\mu m$.

La diagonale (AB) du losange n'est pas parallèle au sens du déplacement du segment, ce qui rend très difficile sa répétition pour obtenir simplement une surface infinie. Nous avons choisi de conserver ce motif en le reproduisant légèrement incliné de façon à ce que (AB) devienne horizontale, introduisant une erreur de l'ordre de 2.3 degrés dans l'orientation du motif.

En résumé, nous avons trouvé manuellement, par tâtonnement, un découpage élémentaire figure 3.3(b) qui va permettre par recollement de trouver un motif global (figure 3.4(a)) qui pourra après troncature (figure 3.4(b)) être répété à l'infini en conservant les caractéristiques géométriques générales de l'échantillon.

La même procédure a été utilisée pour la surface L1, dont les stries principales sont "perpendiculaires" au sens de déplacement (figure 3.5(a)) et le motif est un losange dont la dimension de l'axe principal est grande devant la largeur de l'échantillon.

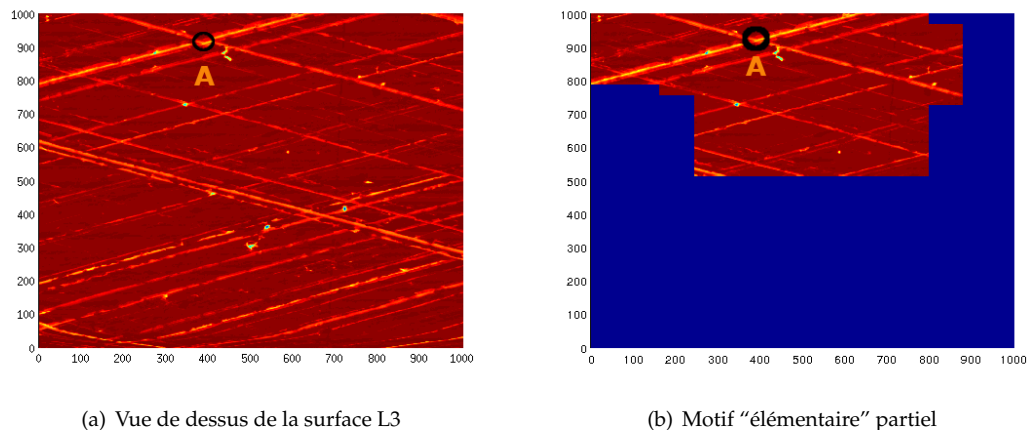


FIGURE 3.3 – Mise en évidence du motif de la surface L3

Dans la nouvelle approche, la largeur du domaine de calcul est imposée par la largeur du motif, contrairement à la technique présentée dans la section 2.3 où la largeur est donnée comme un paramètre que l'on peut imposer.

3.2. OBTENTION DES SURFACES – UNE NOUVELLE APPROCHE

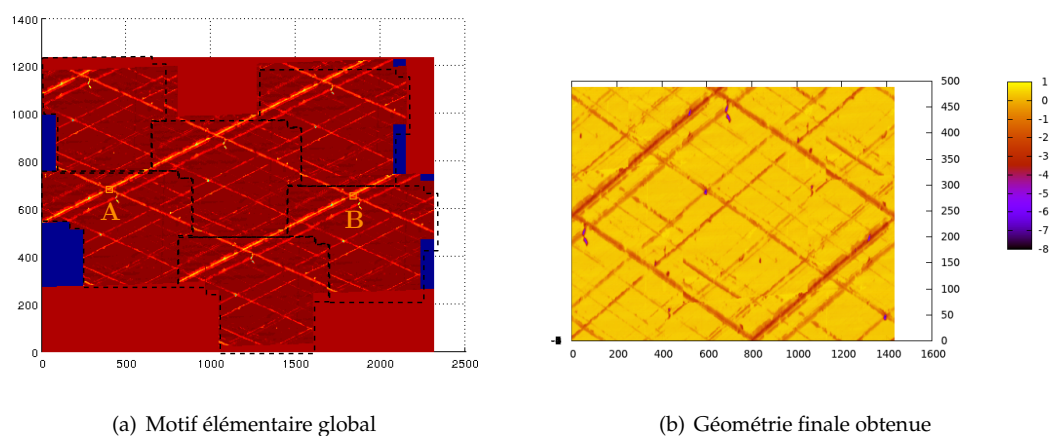


FIGURE 3.4 – Duplication et vue du motif duplicable obtenu

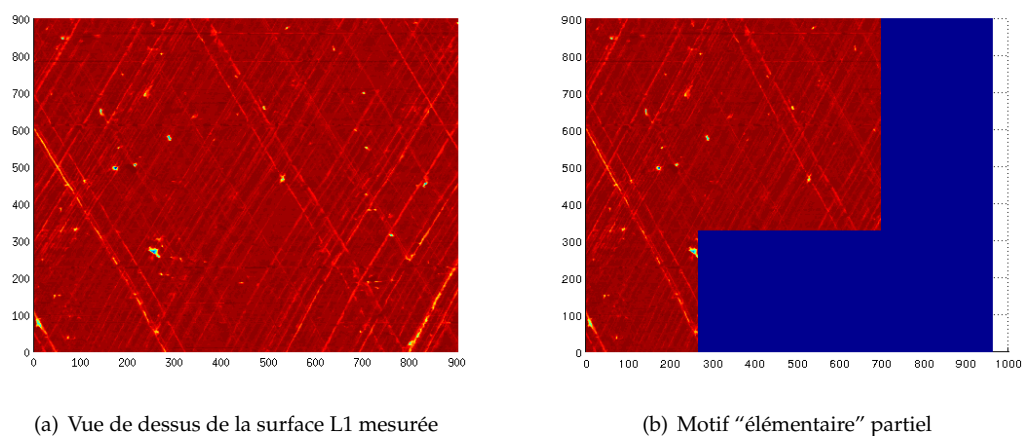


FIGURE 3.5 – Mise en évidence du motif de la surface L1

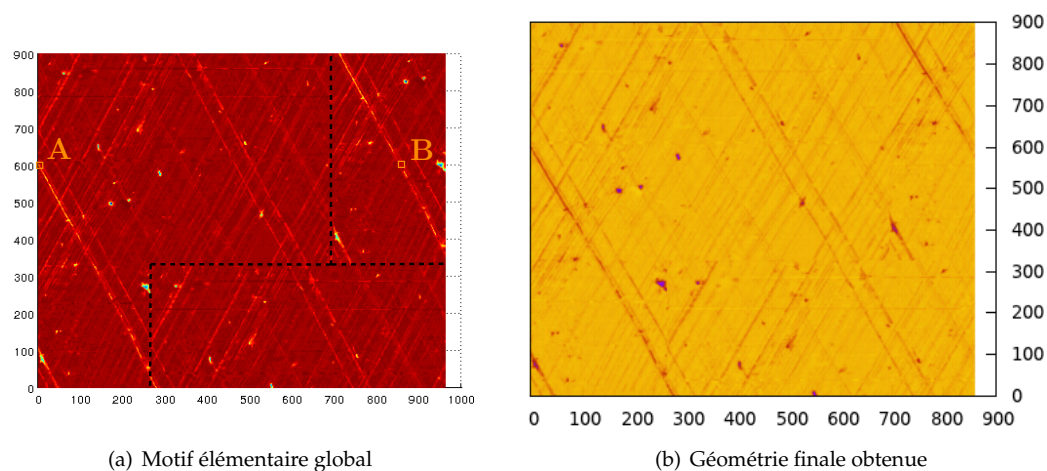


FIGURE 3.6 – vue du motif duplicable obtenu

3.3 Influence de la méthode de recollement

Nous avons étudié si les deux manières de construire une surface entraînent des résultats différents par rapport à la méthode présentée dans la section 2.3.

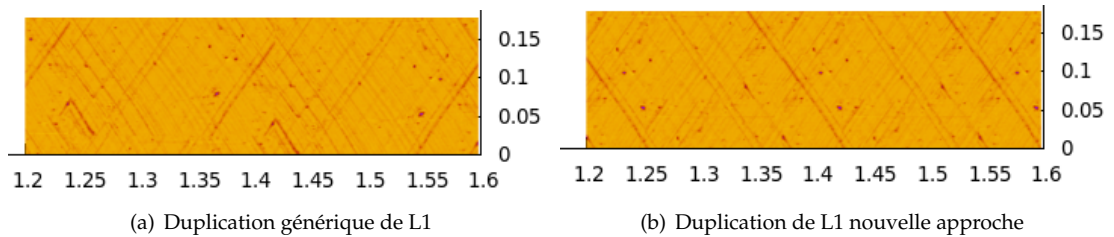


FIGURE 3.7 – Vue du dessus de la surface extraite de L1 sur laquelle les calculs sont faits

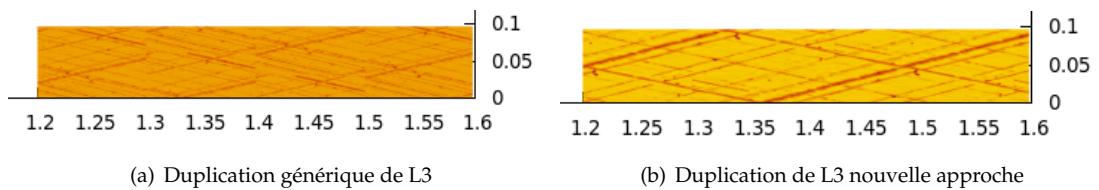


FIGURE 3.8 – Vue du dessus de la surface extraite de L3 sur laquelle les calculs sont faits

Nous avons considéré deux segments différents :

- un segment coupe feu type A de série (figure 3.9), celui qui a été utilisé pour les essais tribomètres effectués par Renault,

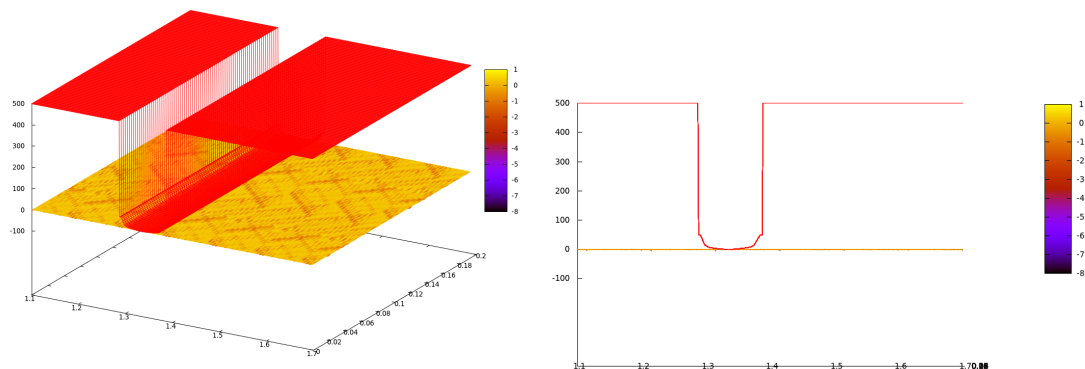


FIGURE 3.9 – Segment type A coupe feu (CDF) essence 1.6L

- un segment plat type P (figure 3.10), comme ceux utilisés dans les segments racleurs.
- Pour chacun d'eux, nous avons fait des calculs sur les 4 surfaces représentées figures (3.7, 3.8)

À forte charge ($13\,333\text{ N.m}^{-1}$), nous observons :

- pour les surfaces issues de L3 :

3.3. INFLUENCE DE LA MÉTHODE DE RECOLLEMENT

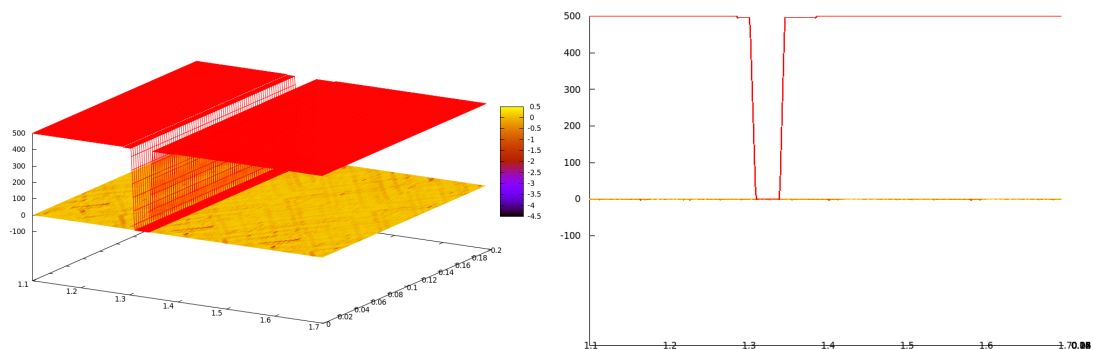


FIGURE 3.10 – Segment type P – racleur

- le recollement des surfaces n’a que peu d’influence sur les déplacements du segment. Seule la géométrie du segment va changer la position d’équilibre. La position du segment dans le cas du recollement générique est toujours légèrement inférieure à celle du cas du recollement par motif. (figure 3.11)

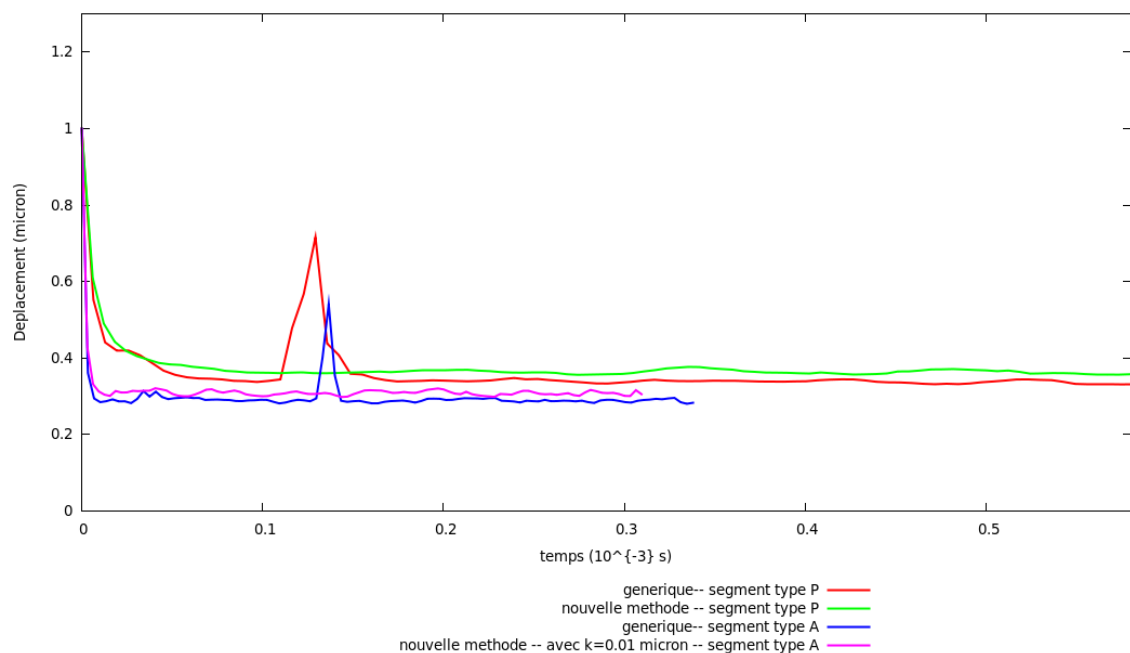


FIGURE 3.11 – Déplacements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l’échantillon L3 pour deux segments (type A, type P) à forte charge ($13\,333\,N.m^{-1}$)

Cette différence d’environ $0.02\,\mu m$ sur le déplacement vertical va entraîner des frottements différents pour les deux types de recollement.

Le segment type P donne toujours des frottements plus important et plus dispersé que le segment type A.

Les frottements pour la surface L3 sont plus faibles avec la nouvelle méthode qu’avec la méthode générique. Peut être que le recollement d’un plus grand nombre de stries permet une meilleure lubrification.(figure 3.12)

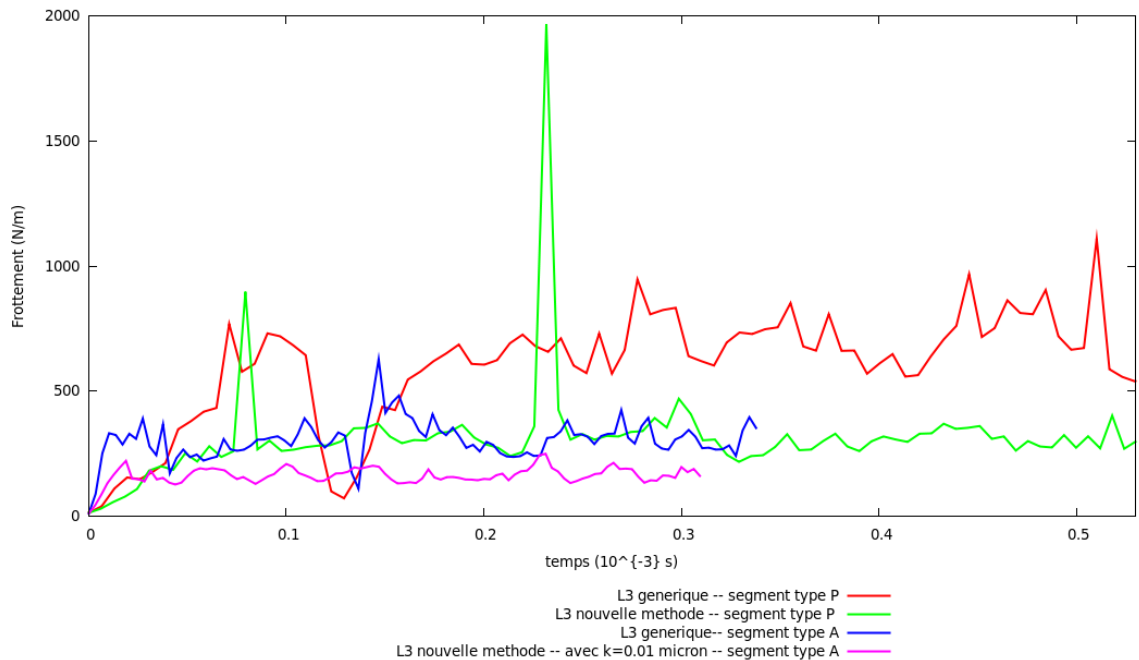


FIGURE 3.12 – Frottements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L3 pour deux segments (type A, type P) à forte charge ($13\,333\text{ N.m}^{-1}$)

Les résultats présentés pour la surface L3 avec le segment type A ont été réalisés avec le paramètre \bar{k} , défini comme la distance minimale entre le segment et la chemise, pris égal à $0.01\mu\text{m}$. Car sinon le système diverge, la force hydrodynamique étant insuffisante pour compenser la force appliquée. Des pics d'aspérité rentrent alors en contact avec le segment, rendant le modèle hydrodynamique non valable (figure 3.13), donnant lieu à des forces hydrodynamiques localement très importantes propulsant le segment loin de la chemise. Cette variable sera décrite plus en détail dans la section 3.4.

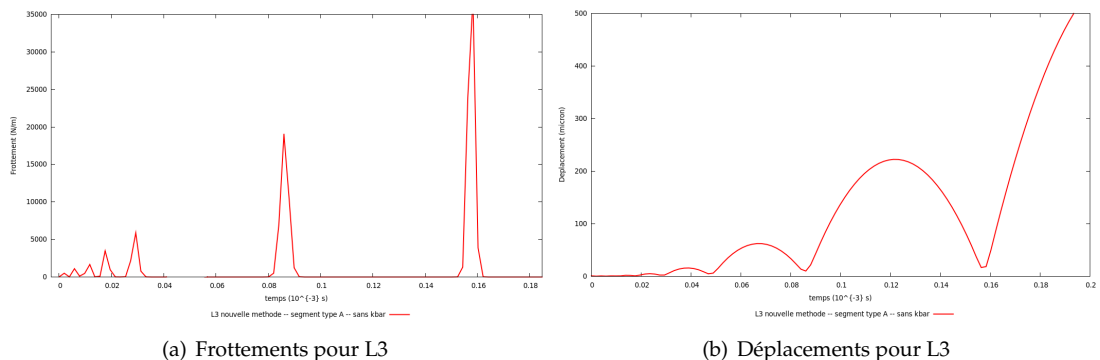


FIGURE 3.13 – Frottements et déplacements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L3 générées avec la nouvelle méthode pour le segment type A, à forte charge et sans \bar{k}

- pour les surfaces issues de L1 :
 - les différences sur les déplacements du segment à géométrie constante sont moins importantes

3.3. INFLUENCE DE LA MÉTHODE DE RECOLLEMENT

que dans le cas des surfaces issues de L3 (figure 3.14). Malgré des positions plus éloignées de la

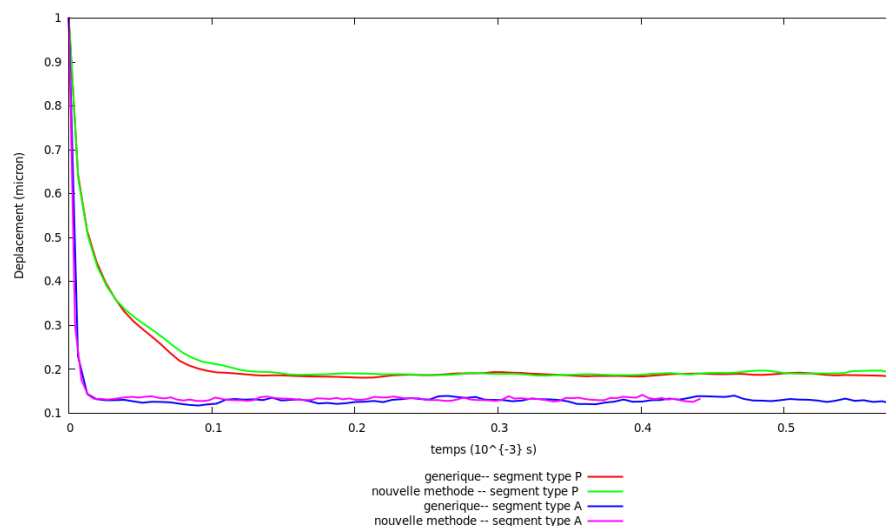


FIGURE 3.14 – Déplacements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L1 pour deux segments (type A, type P) à forte charge ($13\,333\text{ N.m}^{-1}$)

surface pour le segment type P, les frottements pour ce segment plus important que pour le type A (figure 3.15). Sinon les ordres de grandeurs des frottements à segments donnés sont semblables ($\simeq 220\text{ N/m}$ pour le type A et $\simeq 480\text{ N/m}$ pour le type P).

Enfin les instabilités dues aux pics sont présentes dans les deux types de recollement.

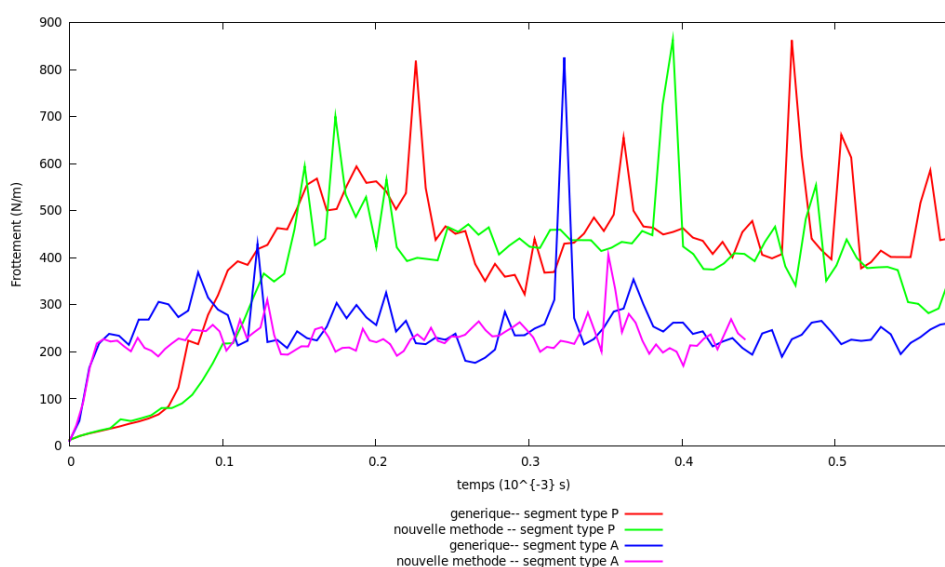


FIGURE 3.15 – Frottements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L1 pour deux segments (type A, type P) à forte charge ($13\,333\text{ N.m}^{-1}$)

À faible charge (200 N.m^{-1}), nous observons :

- pour les surfaces issues de L3 :
 - une différence entre les deux types de génération de surface à la fois sur les déplacements (fi-

gure 3.17) et à la fois sur les frottements (figure 3.16). Il y a de différences sur les trajectoires du segment pour le segment type P que le segment type A.

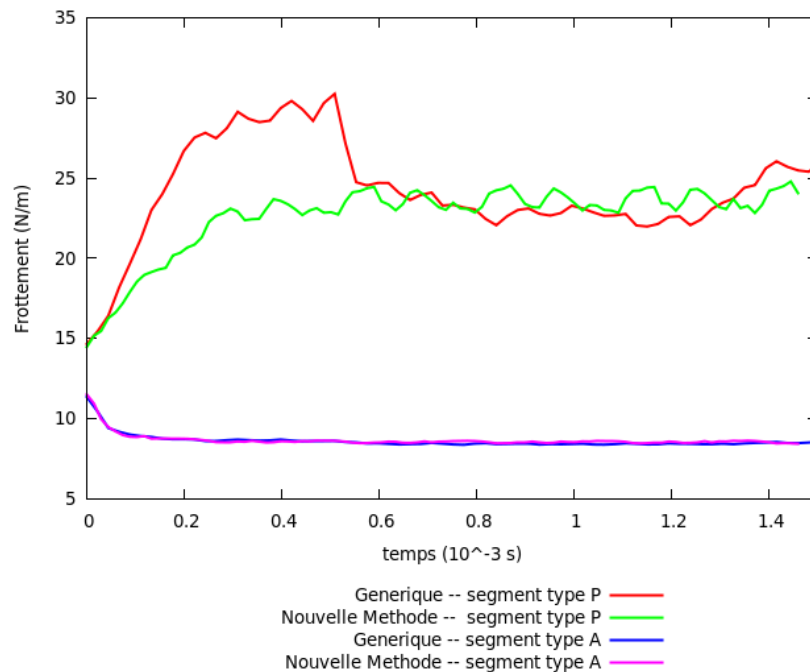


FIGURE 3.16 – Frottements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L3 pour deux segments (type A, type P) à forte charge (200 N.m^{-1})

Le nouveau recollement est plus régulier et plus stable que le recollement dit générique, d'autre part on distingue sur la représentation des déplacements (figure 3.17), ainsi que sur les frottements (figure 3.16), la périodicité du motif que l'on recolle. Dans le cas de L3, l'échantillon mesurant 0.29 mm , la vitesse étant de 10 m.s^{-1} , une longueur de l'échantillon est parcouru en $0.29 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Le recollement pour L3 a de l'importance tant sur le frottement que sur le déplacement. On observe les cas suivants :

- soit les frottements sont quasi identiques (segment type A) et les déplacements sont alors très différents,
 - soit les déplacements sont semblables (segment type P) et les frottements sont alors très différents.
- Cela prouve que dans notre cas, bien qu'étant partie d'une même surface, nous aboutissons à deux surfaces ayant des propriétés tribologiques différentes. Enfin comme dans le cas fortement chargé, le segment type P frotte toujours plus que le segment type A.

Le zoom sur les déplacements dans le cas du segment type P permet de constater les différences entre les deux surfaces. On observe une plus grande régularité des résultats de la nouvelle méthode ce qui permet de dire que la solution est stabilisée, et de calculer ainsi les moyennes des frottements sur l'échantillon (figure 3.18).

- pour les surfaces issues de L1 :
 - les différences entre les deux types de générations de surfaces sont moins importantes que pour le

3.3. INFLUENCE DE LA MÉTHODE DE RECOLLEMENT

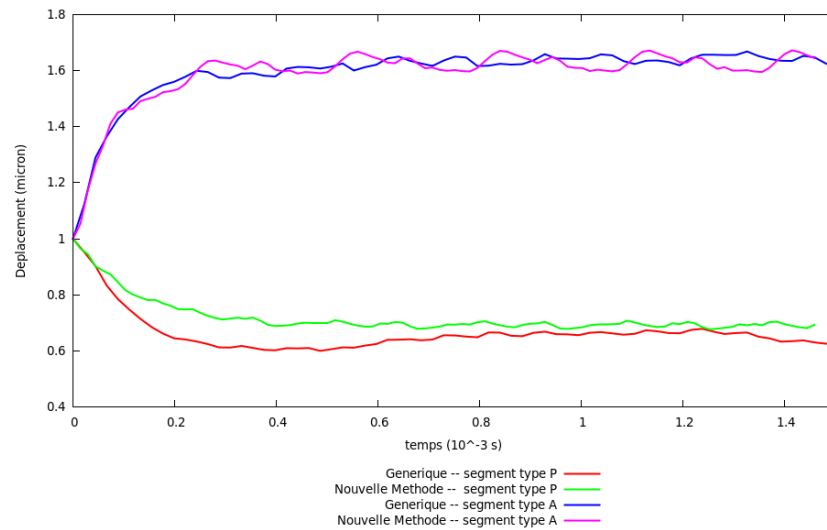


FIGURE 3.17 – Déplacements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L3 pour deux segments (type A, type P) à forte charge (200 N.m^{-1})

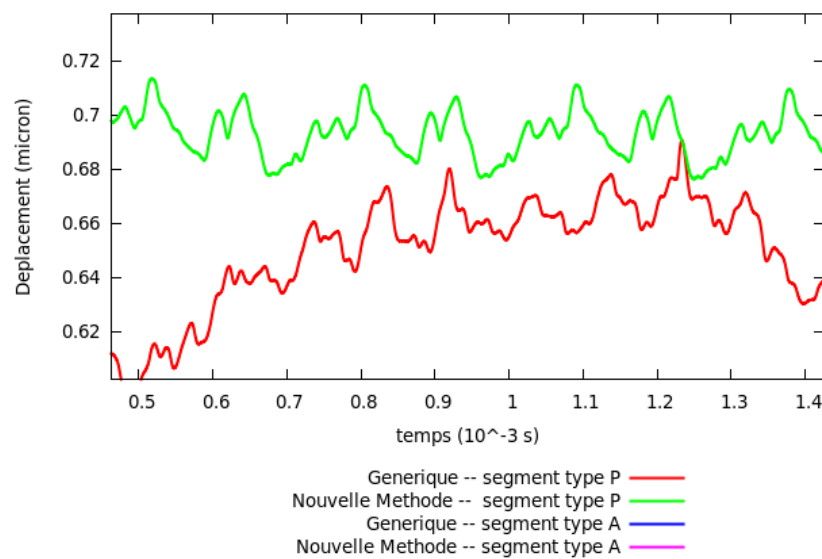


FIGURE 3.18 – Zoom du déplacement des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L3 pour deux segments (type A, type P) à forte charge (200 N.m^{-1})

cas de L3 et les oscillations du segments plus régulières et plus petites (figures 3.20-3.19).

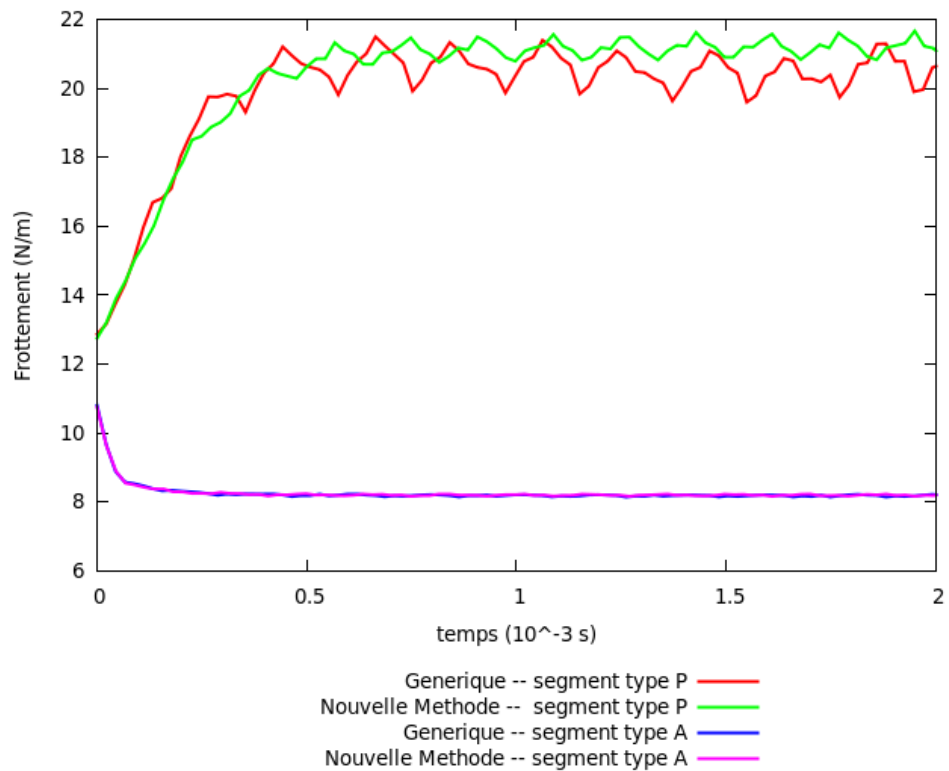


FIGURE 3.19 – Frottements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L1 pour deux segments (type A, type P) à forte charge (200 N.m⁻¹)

On retrouve cependant les deux mêmes cas que pour la surface L3, à savoir que dans le cas du segment type P, les déplacements entre les deux surfaces sont semblables, mais les frottements sont différents. On retrouve sur les courbes de frottement, les périodes des surfaces qui dans le cas de L1 représentent 0.17 mm soit 0.17 10⁻³ s.

Si l'on regarde un zoom du déplacement pour L1, on constate que les déplacements du segment au cours du temps pour la surface obtenue par la nouvelle méthode par motif est plus stable que dans le cas générique (figure 3.20).

Des écarts entre les deux types de génération de surface sont observés dans le cas hydrodynamique (faiblement chargée). Suivant le type de segment des différences apparaissent soit sur les déplacements soit sur les frottements. Enfin la nouvelle méthode entraîne des résultats plus stable à faible charge. À forte charge, les différences s'atténuent car les forces de contact deviennent prépondérantes et sont calculées à partir d'un "plan moyen" des plateaux peu sensible au type de recollement.

En conclusion, la manière de générer une surface de calcul à partir d'un échantillon limité est un problème important. Par la suite, nous avons utilisé la surface recollée avec la nouvelle méthode afin de

3.3. INFLUENCE DE LA MÉTHODE DE RECOLLEMENT

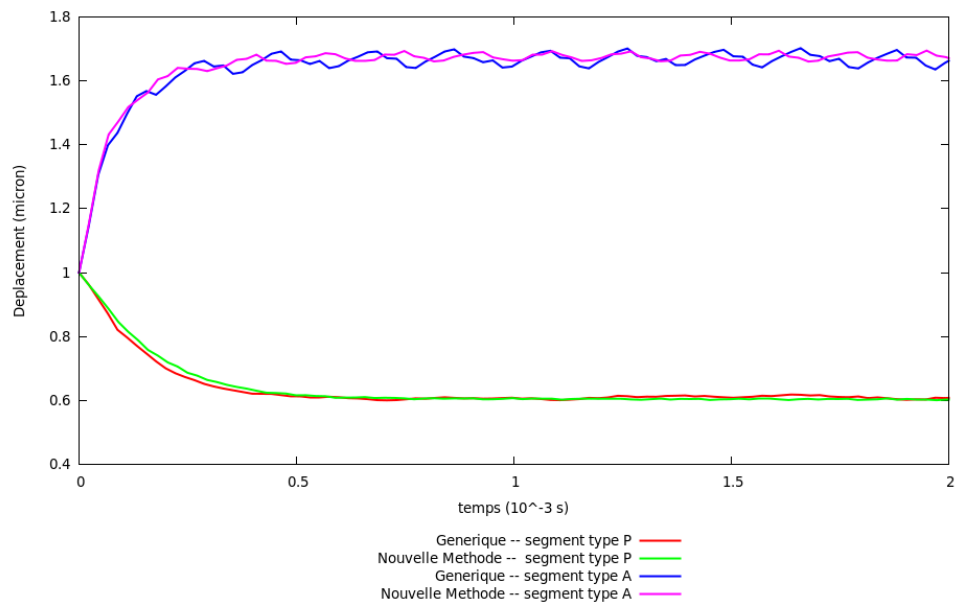


FIGURE 3.20 – Déplacements des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L1 pour deux segments (type A, type P) à forte charge (200 N.m^{-1})

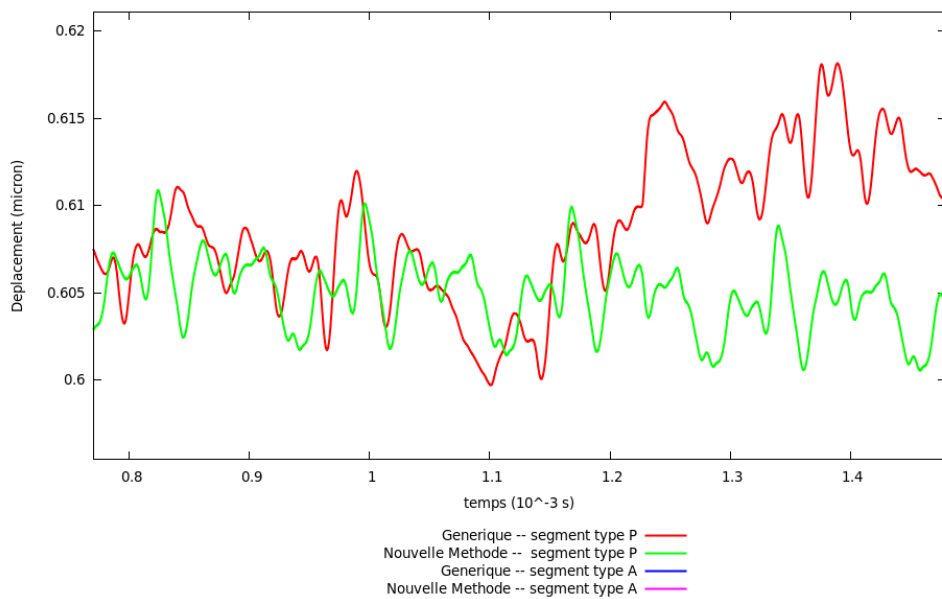


FIGURE 3.21 – Zoom du déplacement des segments au cours du temps pour des surfaces issues de l'échantillon L1 pour deux segments (type A, type P) à forte charge (200 N.m^{-1})

caractériser au mieux ses performances hydrodynamiques, et d'avoir des résultats les plus stables possibles.

3.4 Influence des paramètres de calcul

Nous allons montrer tout d'abord l'influence des paramètres de discrétisation et de l'augmentation de la masse. Puis dans un deuxième temps, nous étudierons l'influence du paramètre \bar{k} .

3.4.1 Paramètres de discrétisation et la Masse

Nous avons choisi de travailler avec deux charges imposées :

- une forte $13\,333\text{N.m}^{-1}$
- une faible 133.44N.m^{-1}

Nous avons défini un maillage "standard" comme étant :

- $\Delta x = 12\,\mu\text{m}$
- $\Delta y = 10\,\mu\text{m}$
- $\Delta t = 2.5\,10^{-7}\text{s}$
- $M = 0.038\text{kg/m}$

Avec ces valeurs, le code de lubrification tourne dans des temps acceptables (tableau tab :convergence).

Nous avons fait varier chacun de ces paramètres, voici les 6 cas étudiés :

1. le cas où l'on raffine la discrétisation spatiale :
 - $\Delta x = 6\,\mu\text{m}$ $[\frac{\Delta x}{2}]$
 - $\Delta y = 5\,\mu\text{m}$ $[\frac{\Delta y}{2}]$
- 2-3. les cas où l'on augmente la masse :
 - $M = 0.38\text{kg/m}$ [Masse x 10]
 - $M = 3.8\text{kg/m}$ [Masse x 100]
- 4-5. les cas où l'on diminue le pas de temps :
 - $\Delta t = 1.25\,10^{-7}\text{s}$ $[\frac{\Delta t}{2}]$
 - $\Delta t = 2.5\,10^{-8}\text{s}$ $[\frac{\Delta t}{10}]$
6. le cas où l'on diminue le pas de temps et où l'on augmente la masse :
 - $\Delta t = 1.25\,10^{-7}\text{s}$ $[\frac{\Delta t}{2}]$
 - $M = 0.38\text{kg/m}$ [Masse x 10]

Nous avons réalisé ces simulations sur les surfaces obtenues avec la nouvelle méthode de duplication.

Influence sur le déplacement et le frottement

À forte charge, les figures 3.22-3.23 montrent les déplacements tandis que les figures 3.24-3.25 montrent les frottements, pour les différents paramètres pour la surface L1. Les mêmes phénomènes sont observés pour la surface L3.

3.4. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE CALCUL

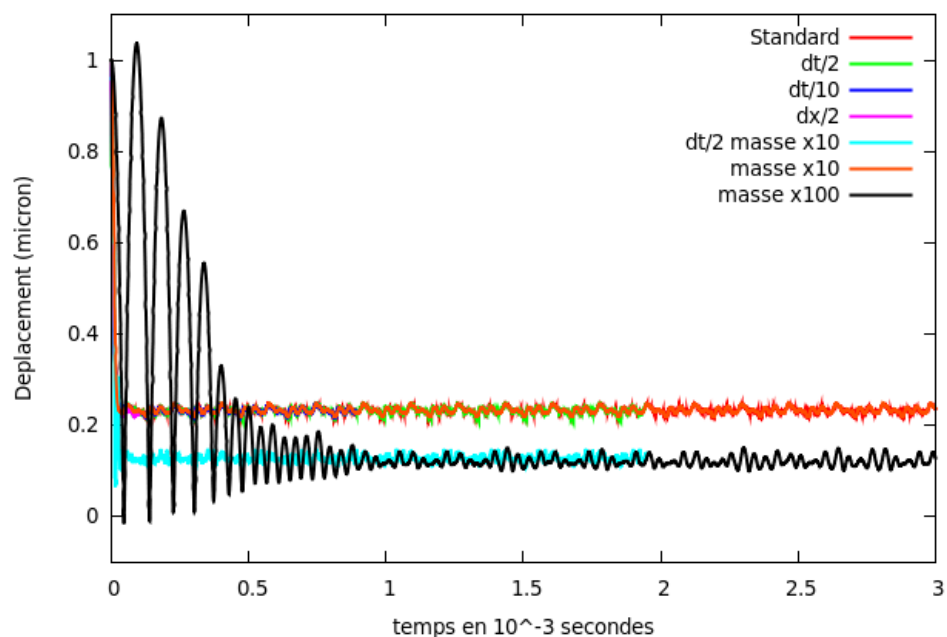


FIGURE 3.22 – Représentation des déplacements du minimum du segment au cours du temps pour la surface L1 à forte charge

On remarque que l'augmentation du pas de temps entraîne des oscillations tant sur le déplacement que le frottement. Ceci est dû aux rugosités réelles de la chemise qui vont entraîner des pressions légèrement différentes suivant les points d'interpolation.

À masse constante, nous observons une convergence des frottements et des déplacements. Nous remarquons cependant que les courbes correspondantes à la masse M (normal, $\frac{\Delta x}{2}$, $\frac{\Delta t}{2}$, $\frac{\Delta t}{10}$) et celles à la masse $10M$ (Δt , $\frac{\Delta t}{2}$) convergent séparément vers des valeurs différentes (figure 3.22). Cela conduit à des frottements différents pour une même charge imposée (figure 3.25).

Le système est donc très sensible à la masse, l'augmentation de cette dernière permet d'atténuer les oscillations du système, mais si l'on prend une masse trop grande, le système aura une autre solution.

Il est donc important pour des calculs à forte charge de prendre des valeurs réalistes de la masse.

On constate sur la figure (3.24) que l'augmentation de la masse va entraîner des frottements importants et très irréguliers. Ceci est en partie dû au fait que l'on va légèrement modifier la surface de calcul en appliquant la troncature à l'aide de \bar{k} .

L'influence du pas de discrétisation à masse constante est particulièrement visible sur le frottement. Le "zoom" de la figure (3.25), montre que lorsque l'on raffine le pas de temps, on a l'apparition de fortes oscillations, celles-ci peuvent être atténuées par le raffinement du pas d'espace, mais cela entraînera des temps de calcul importants.

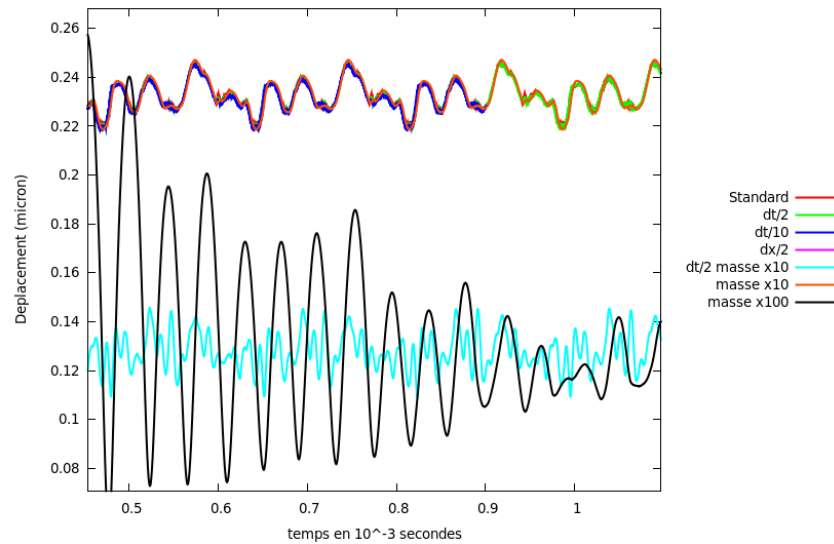


FIGURE 3.23 – Zoom des déplacements du minimum du segment au cours du temps pour la surface L1 à forte charge

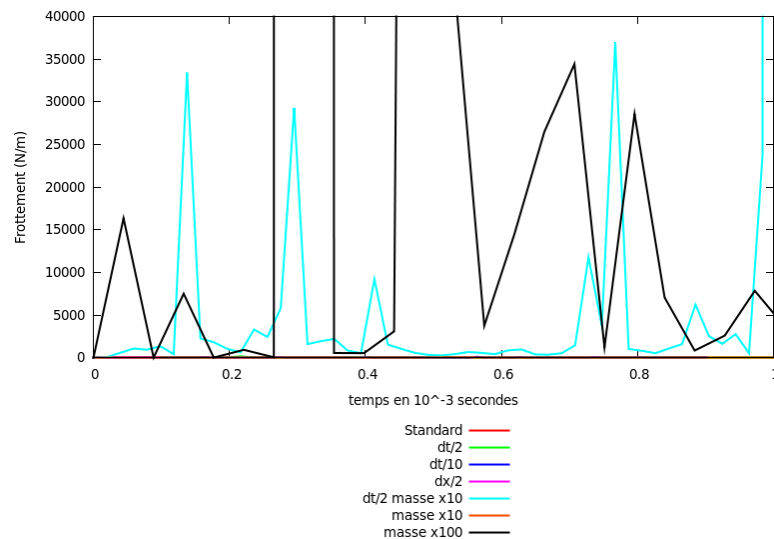


FIGURE 3.24 – Représentation des frottements du segment au cours du temps pour la surface L1 à forte charge

3.4. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE CALCUL

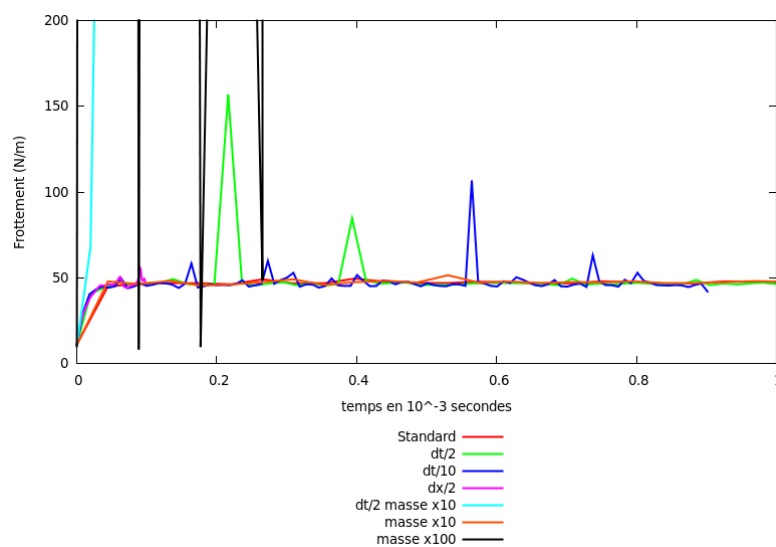


FIGURE 3.25 – Zoom des frottements du segment au cours du temps pour la surface L1 à forte charge

Notons que les fortes oscillations du frottement sont dues à la partie Couette de la force de frottement hydrodynamique.

$$f_{\text{Couette}} = \iint_{\Omega} \bar{\mu} \frac{\bar{u}\theta}{h} d\bar{x}d\bar{y}$$

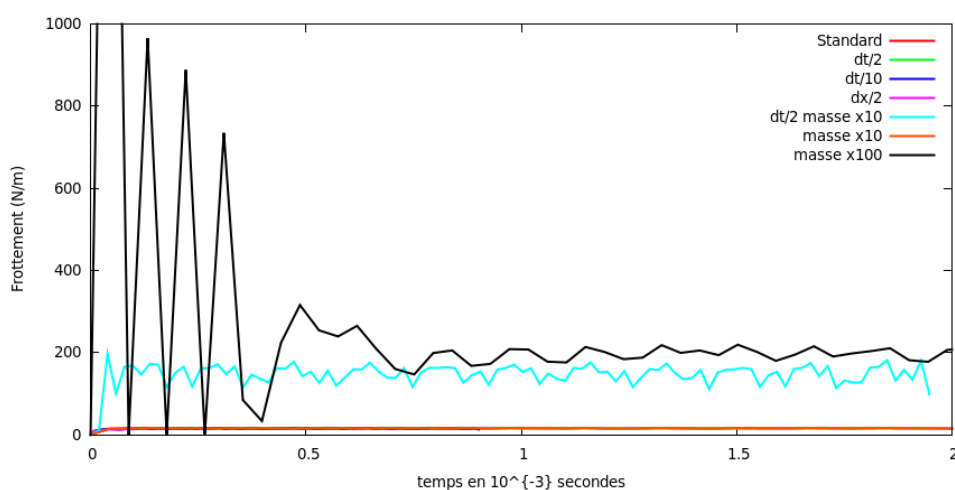


FIGURE 3.26 – Forces de frottement sans considérer les forces de frottement de Couette pour L1 à forte charge

À charge appliquée constante $13E3N.m^{-1}$ et lorsque l'on néglige f_{Couette} , la force de frottement globale pour L1 a été multipliée par 100, et pour L3 elle a été divisée par 5. Nous constatons que le frottement est plus stable (figure 3.26), mais dans le cas de L1, le frottement instantané vaut $5E4N.m^{-1}$ pour une

charge appliquée de $13E3N.m^{-1}$. Cela donne un coefficient de frottement supérieure à 1, ce qui n'est pas très réaliste. Au contraire pour la surface L3, le frottement se stabilise autour de $10N.m^{-1}$. Le coefficient de frottement est alors de 0.00025, ce qui est trop faible pour être réaliste à forte charge bien que la valeur moyenne du frottement avec $f_{Couette}$ était faible.

Cette force de frottement due à l'écoulement de Couette est nécessaire pour avoir une valeur de frottement réaliste, mais elle rend l'interprétation de la force de frottement difficile. Il faudrait dans le cas de frottement mixte sévère, envisager une autre manière de calculer ces forces de frottement pour éviter cette dispersion.

3.4. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE CALCUL

À faible charge, les figures 3.27-3.29 représentent les frottements et les déplacements du système, pour les différents pas de discrétisation.

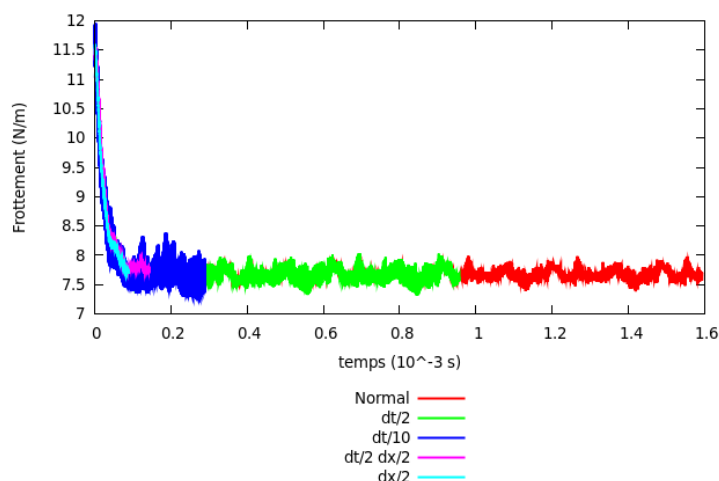


FIGURE 3.27 – Frottement total au cours du temps pour la surface L3 à faible charge à masse réelle

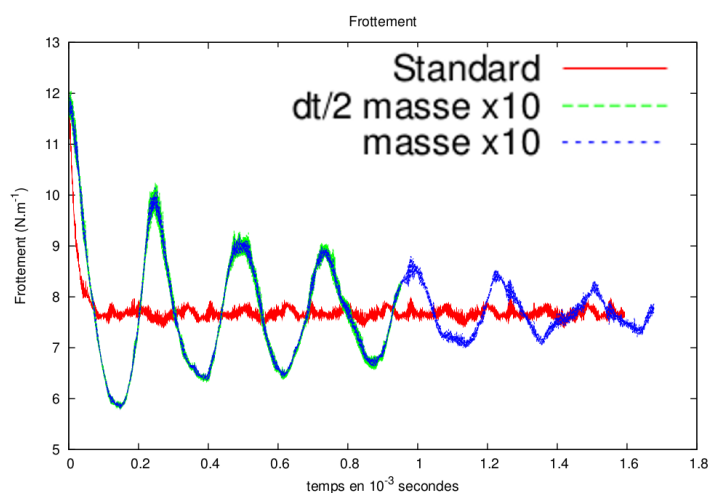


FIGURE 3.28 – Frottement total au cours du temps pour la surface L3 à faible charge à masse multipliée par 10

À faible charge, on constate que pour la masse réelle (figure 3.27), les variations des autres paramètres Δx , Δy , Δt montrent une bonne convergence du système¹. Pour la masse réelle multipliée par 10 (figure 3.28), on obtient la même trajectoire pour des pas de temps différents Δt et $\frac{\Delta t}{2}$, de plus il y a convergence lente vers la solution correspondant à masse réelle. L'influence de la masse se fait essentiellement sentir sur le temps mis par le système pour se stabiliser.

1. Des calculs récents sur la même configuration (L3 faible charge) tendent à montrer qu'une diminution plus importante du pas de temps par rapport au pas d'espace $[\frac{\Delta t}{10}, \frac{\Delta x}{2}]$ entraîne une augmentation des frottements de l'ordre de 20% en moyenne

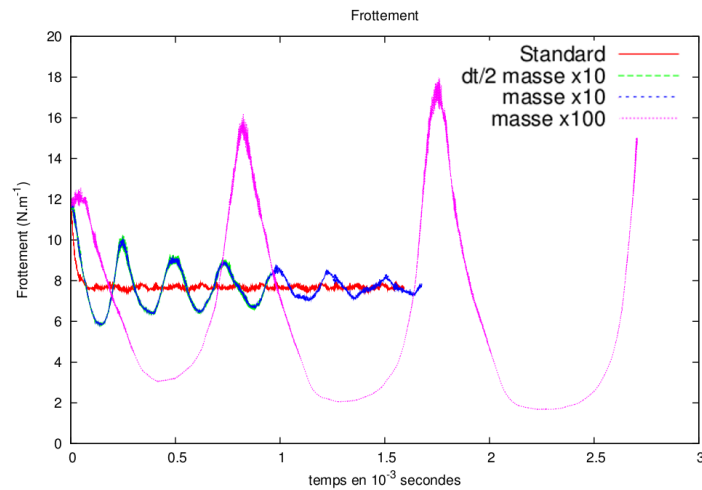


FIGURE 3.29 – Frottement total au cours du temps pour la surface L3 à faible charge à une masse multipliée par 100

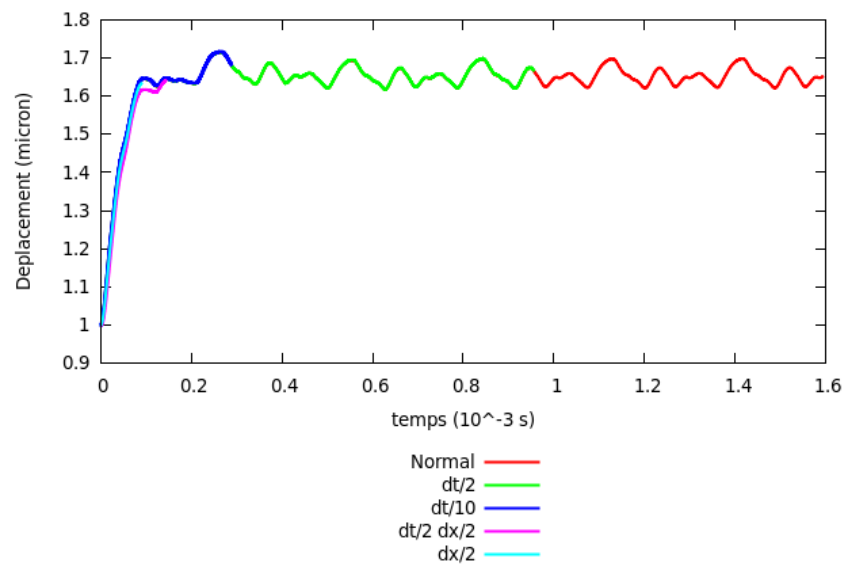


FIGURE 3.30 – Position du segment au cours du temps à faible charge pour la surface L3

3.4. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE CALCUL

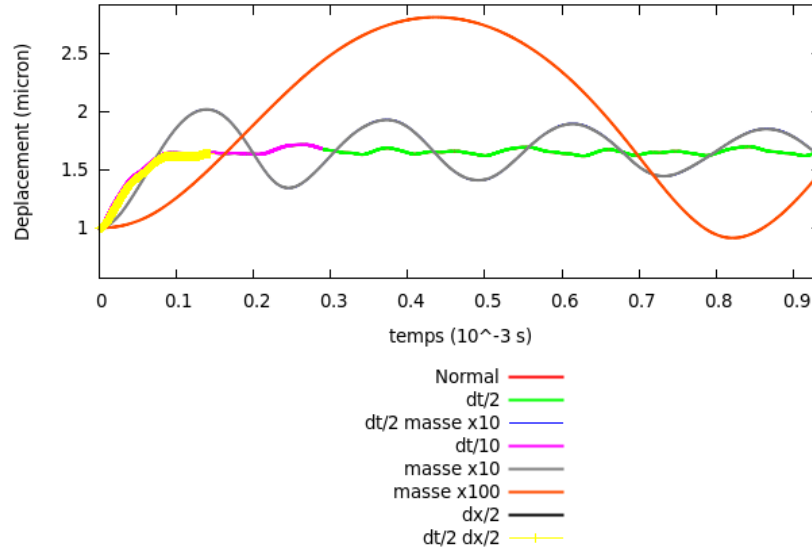


FIGURE 3.31 – Zoom de la position du segment au cours du temps à faible charge pour la surface L3

On remarque que pour une masse réaliste du segment, on retrouve une période de $0.17 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ce qui correspond, avec une vitesse de déplacement $V = 10 \text{ m.s}^{-1}$, à la taille du motif L1 que l'on duplique.

Il semble donc peu intéressant d'introduire une masse plus grande, le seul petit avantage étant une convergence plus rapide du système à chaque pas de temps. Ceci est surtout visible dans le cas de la masse multipliée par 100 pour lequel on remarque (figure 3.30, 3.29) que le même temps de calcul effectif correspond à un temps de 1,02s pour une masse normale et à 1,8s pour une masse 100M.

Les résultats globaux sont confirmés lorsque l'on zoome, aussi bien pour les déplacements que pour les frottements (figure 3.31).

3.4.2 Paramètres de la loi de contact $[\bar{k}, \sigma, H3]$

En introduisant le paramètre \bar{k} afin que le segment ne pénètre jamais dans la chemise, nous avons modifié la physique du système. Nous voulons quantifier l'influence de ce paramètre. Pour cela, nous avons considéré 3 surfaces (L1, L3 et une surface lisse), issues de la nouvelle méthode de recollement puis nous avons fait varier le paramètre \bar{k} . Les valeurs étudiées pour \bar{k} sont :

- $\bar{k} = 0.01 \mu\text{m}$
- $\bar{k} = 0.02 \mu\text{m}$
- $\bar{k} = 0.05 \mu\text{m}$

Tous les résultats présentés pour \bar{k} ont été réalisés avec un segment coupe feu type A.

L'on constate sur les figures (3.32, 3.33) que dans le cas lisse le choix du \bar{k} n'a pas d'importance, seule la charge appliquée influe sur le système. La différence de position d'équilibre du segment entre les deux chargements est de 0.01 microns.

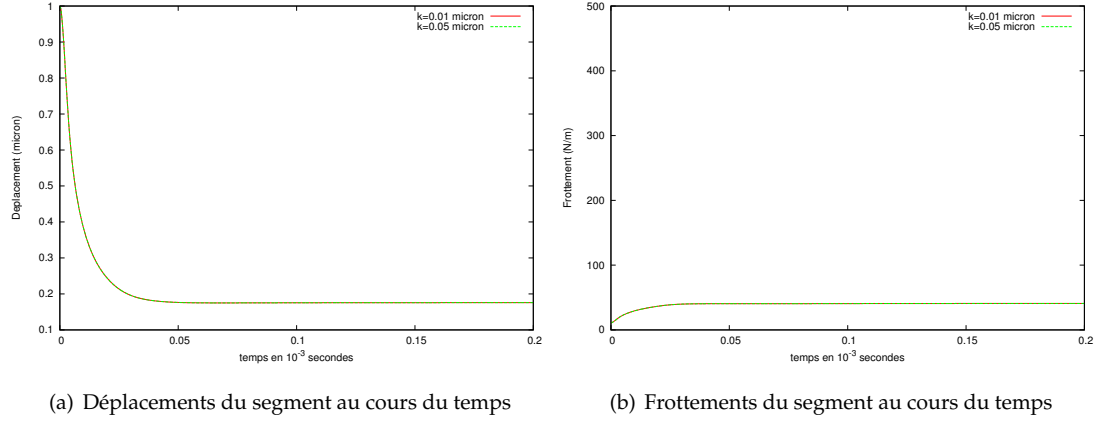


FIGURE 3.32 – Frottements et déplacements pour une surface lisse pour un choix de $\sigma = \sigma_{L3} = 0.034 \mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 13\,333 N.m^{-1}$

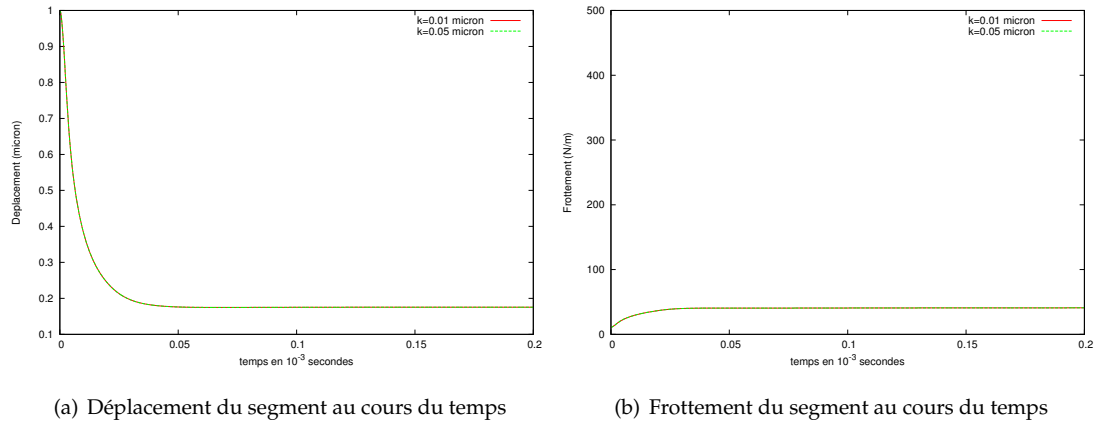


FIGURE 3.33 – Frottements et déplacements pour une surface lisse pour un choix de $\sigma = \sigma_{L3} = 0.034 \mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 4\,000 N.m^{-1}$

À charge moyenne $W_a = 4\,000 N.m^{-1}$, on peut observer qu'il n'y a pas de différence entre les 3 cas pour les surfaces L1 ou L3. Les déplacements et les frottements sont les mêmes pour les 3 valeurs de \bar{k} (figure 3.34-3.35).

Dans le cas de L3, on remarque une légère différence des trajectoires du segment, mais cela n'a pas de conséquence sur les frottements.

Enfin pour une charge de $W_a = 13\,333 N.m$, les positions stabilisées du segment ainsi que les frottements sont différents entre le cas $\bar{k} = 0.05 \mu m$ et les cas $\bar{k} = 0.01 \mu m$ et $\bar{k} = 0.02 \mu m$ (figure 3.37-3.38).

Dans le cas $\bar{k} = 0.05 \mu m$, les frottements sont plus importants et des oscillations dues au terme de Couette du frottement apparaissent.

3.4. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE CALCUL

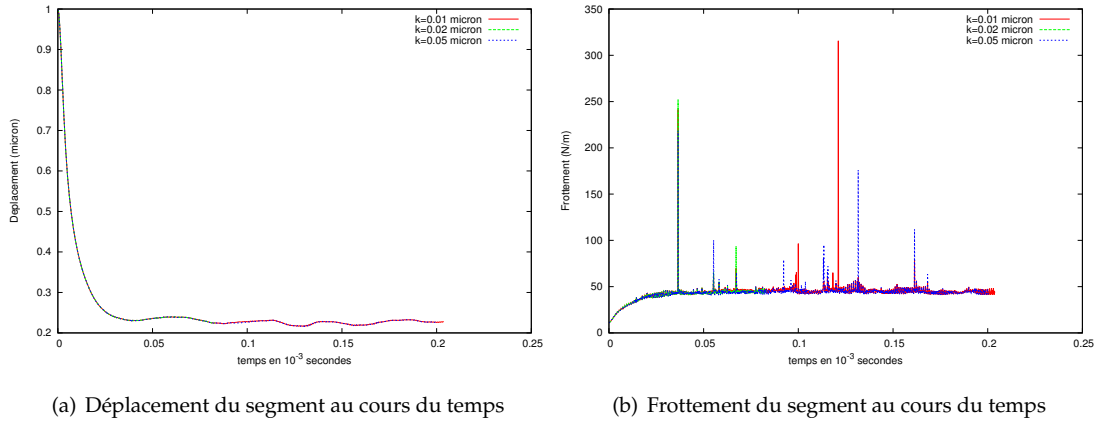


FIGURE 3.34 – Frottements et déplacements pour L1 avec $\sigma_{L1} = 0.053\mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 4000N.m^{-1}$

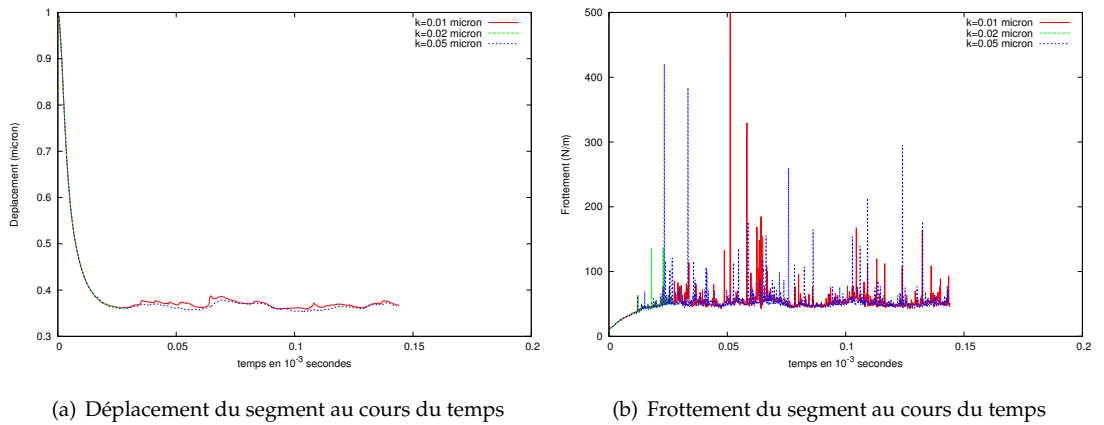


FIGURE 3.35 – Frottement et déplacement pour L3 avec $\sigma_{L3} = 0.034\mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 4000N.m^{-1}$

L'introduction du paramètre \bar{k} permet d'avoir une continuité dans l'équilibre des forces sans pour autant modifier le modèle pour le remplacer par un modèle elasto-hydrodynamique. Comme on peut le remarquer sur les figures 3.34-3.35, la position du segment se trouve parfois en dessous du maximum de la surface. Le maximum des hauteurs est :

- pour L1 de $0.35373 \mu m$, pour une position stabilisée d'environ $0.27\mu m$
- pour L3 de $0.505724 \mu m$, pour une position stabilisée d'environ $0.37\mu m$

Dans les deux cas présentés, nous sommes dans une situation où l'on tronque un certain nombre de pics de rugosité pour éviter le contact métal-métal.

La variable \bar{k} est prise dans la suite égale à $0.01\mu m$, cette valeur permet de retarder les effets d'oscillations dues au terme de Couette, et les résultats sont identiques à ceux obtenus pour $\bar{k} = 0.02\mu m$.

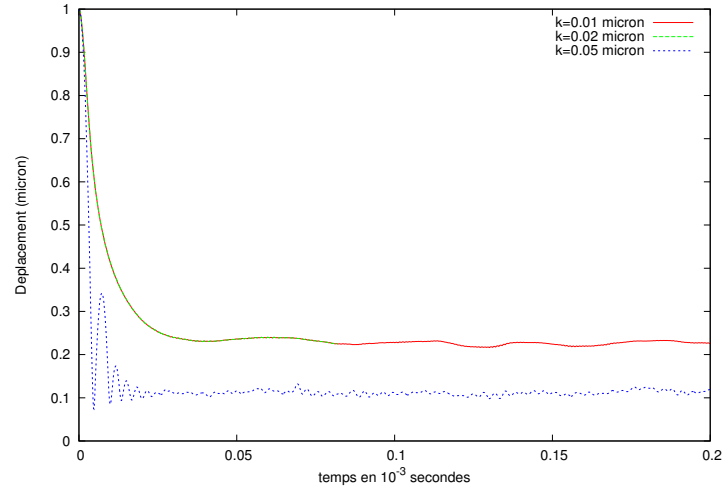


FIGURE 3.36 – Déplacements pour L1 avec $\sigma_{L1} = 0.053\mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 13\,333 N.m^{-1}$

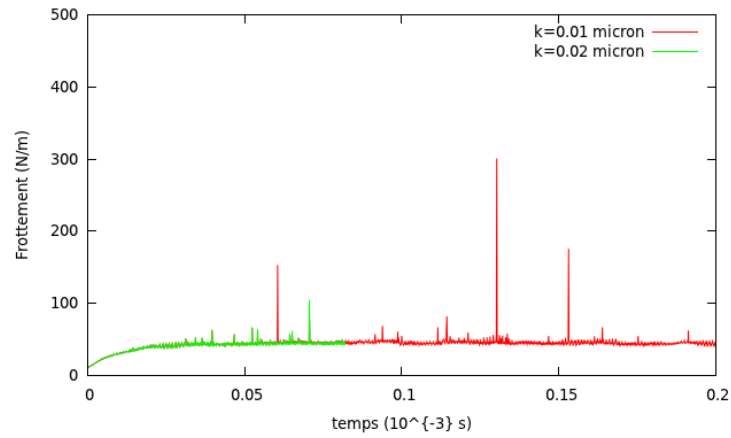


FIGURE 3.37 – Frottements pour L1 avec $\sigma_{L1} = 0.053\mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 13\,333 N.m^{-1}$ pour $\bar{k} = 0.01$ et $\bar{k} = 0.02$ microns

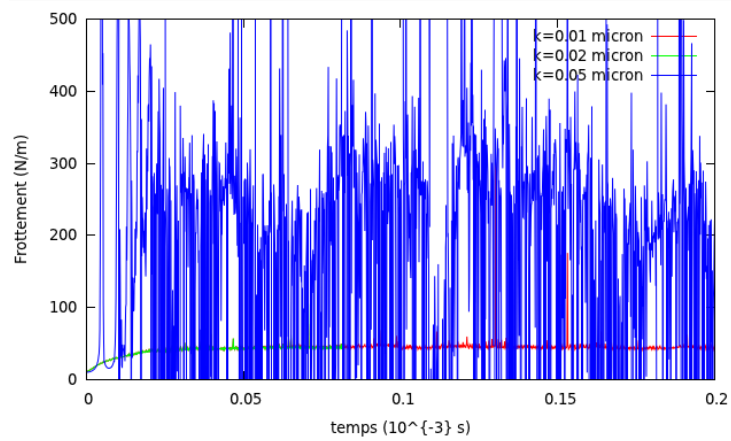


FIGURE 3.38 – Frottements pour L1 avec $\sigma_{L1} = 0.053\mu m$ et pour une charge appliquée $W_a = 13\,333 N.m^{-1}$ pour $\bar{k} = 0.01$, $\bar{k} = 0.02$ et $\bar{k} = 0.05$ microns

3.4. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE CALCUL

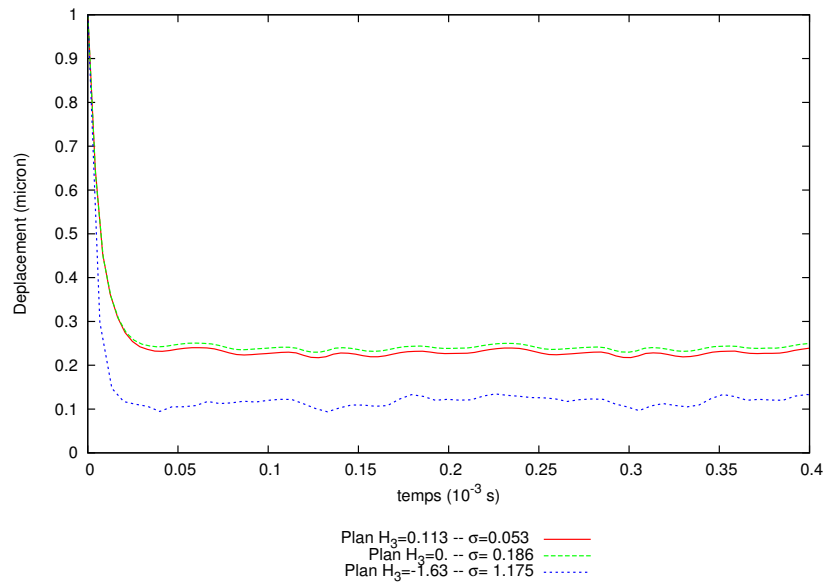
Les autres termes intervenant à forte charge sont les paramètres de la loi de contact de Greenwood-Williamson-Tripp. Nous allons nous intéresser à la valeur du paramètre σ , ainsi qu'à celle du plan moyen $H3$ utilisée pour déterminer cet écart type. Les valeurs des plans moyens $H3$ et des σ sont présentés dans le tableau 3.5. Le plan moyen global est issu du calcul de la moyenne des hauteurs des aspérités faite sur toute la surface, puis du calcul de l'écart type à partir de ce plan "moyen". De plus, nous avons calculé l'écart type associé au zéro ($H3 = 0$) de la surface. Enfin l'appellation Renault désigne le couple ($H3, \sigma$) des plateaux issu des mesures faites par Renault.

	L1(Global)	L1($H3 = 0$)	L1(Renault)	L3(Global)	L3($H3 = 0$)	L3(Renault)
Plan moyen $H3$ (micron)	-1.63	0.	0.113	-2.113	0.	0.29
Écart type σ (micron)	1.175	0.186	0.053	1.547	0.423	0.034

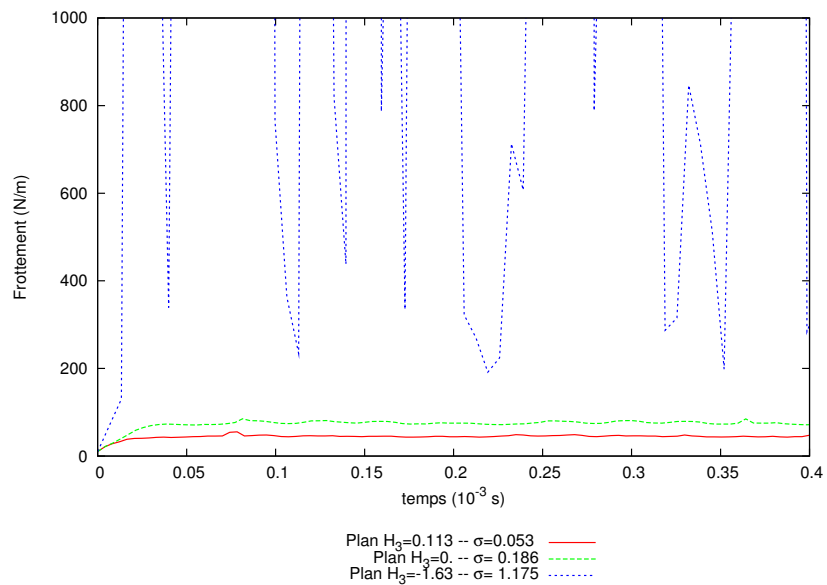
TABLE 3.5 – Valeurs des plans moyens et des σ pour les surfaces L1 et L3

À forte charge, l'influence du plan moyen et de l'écart type pour la loi de contact est très importante dans le cas de L1 (figure 3.39), où l'on remarque des positions d'équilibre totalement différentes et des frottements qui peuvent être très irréguliers dans le cas du plan moyen "normal" de la surface. Dans le cas de L3, bien que les déplacements soient sensiblement les mêmes, on remarque une différence sur les forces de frottements (figure 3.40).

Les surfaces n'ayant pas une répartition gaussienne des hauteurs des aspérités, il est très difficile d'obtenir un plan moyen $H3$ et un σ très précis de la zone des plateaux. Pour une variation de quelques microns, le système dynamique n'aura pas le même comportement : il peut osciller comme dans le cas de L1 puis se stabiliser, ou se stabiliser vers différentes positions selon les valeurs du couple ($H3, \sigma$) comme dans le cas de L3. Ces paramètres modifient l'équilibre fragile s'établissant entre la force de contact, la force hydrodynamique et la force appliquée. Nous avons choisi de prendre dans la suite les données issues des mesures faites par Renault.



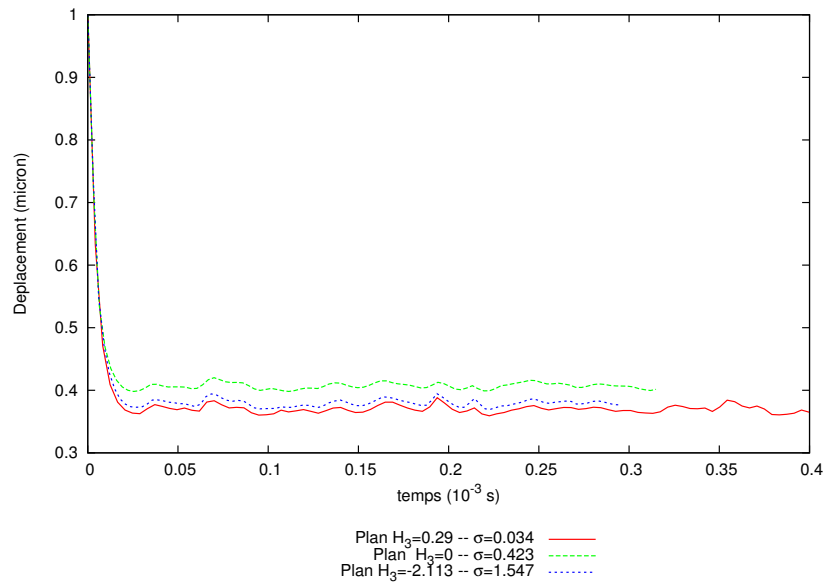
(a) Déplacements du segment au cours du temps



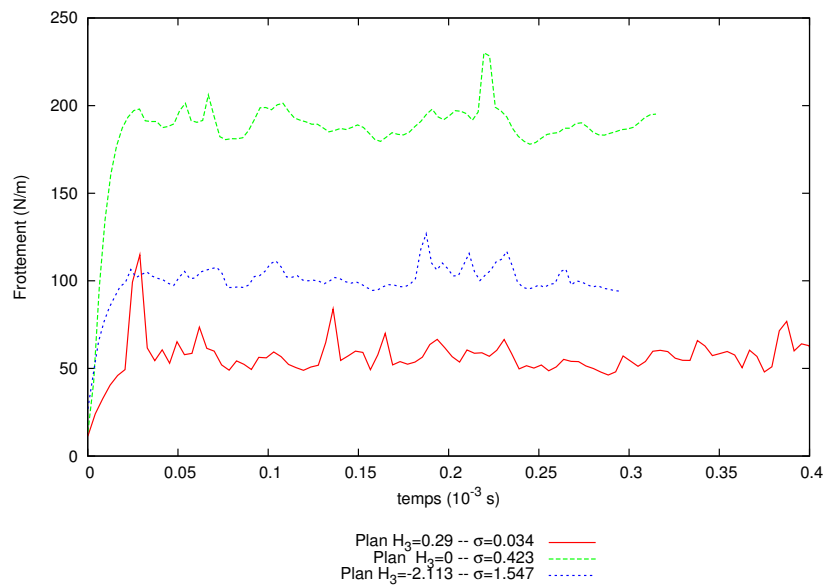
(b) Frottement du segments au cours du temps

FIGURE 3.39 – Frottements et déplacements pour la surface L1 pour différents σ et pour différents plans moyens H_3 pour une forte charge $W_a = 4000 N.m^{-1}$

3.4. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE CALCUL



(a) Déplacements du segment au cours du temps



(b) Frottement du segments au cours du temps

FIGURE 3.40 – Frottements et déplacements pour la surface L3 pour différents σ et pour différents plans moyens H_3 pour une forte charge $W_a = 4000 N.m^{-1}$

Influence de la constante KT dans la loi de contact de Greenwood-Williamson-Tripp

Dans le chapitre 2.4 précédent, nous avons expliqué l'importance de cette constante KT de la loi de contact de Greenwood-Williamson-Tripp. Pour connaître son influence sur le modèle, nous avons à σ fixé (celui issu des mesures) fait varier la constante KT ainsi que le plan moyen $H3$. Les valeurs prises sont :

- pour la variable $\frac{KT}{E'}$:
 - 6.49E-1, issue des valeurs de la thèse d'Organisciak [Org07]
 - 2.4 E-3, issue d'un code interne Renault
 - 8.6 E-3, issue des valeurs de Tomanik [TPZ11]
 - 4.94E-6, calculée à l'aide des formules de Robbe-Valloire [FRV01]
- pour les plans suivants :
 - $H3 = -0.005\mu m$
 - $H3 = 0.05\mu m$
- pour des charges appliquées :
 - $Wa = 66\,666.7 N.m^{-1}$
 - $Wa = 40\,000 N.m^{-1}$
 - $Wa = 13\,333 N.m^{-1}$
 - $Wa = 5\,000 N.m^{-1}$

Nous nous sommes restreints aux chargements entrainant une force de contact.

On remarque sur les courbes de Stribeck (figures 3.41) que plus la constante KT est élevée et plus les frottements globaux sont importants. De même plus le plan moyen est haut et plus les forces de frottements globales sont faibles, pour une même constante KT . La constante KT calculée à l'aide des formules de Robbe-Valloire est bien trop faible pour entrainer une force de frottement réaliste. Elle ne sera donc pas utilisée malgré la facilité de généraliser cette méthode à toutes les surfaces. La surface L3 est plus sensible à cette constante KT que la surface L1.

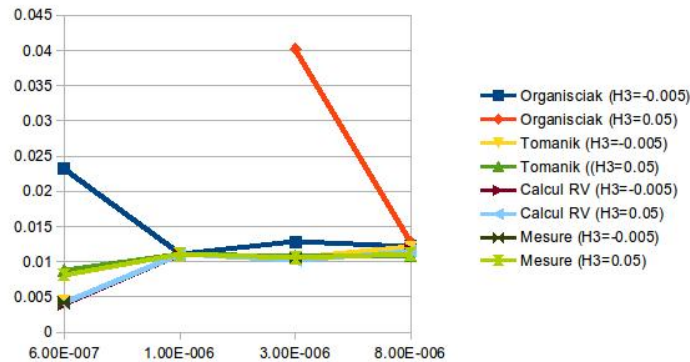
D'autre part, les résultats obtenus sur les coefficients de Stribeck de $6 \cdot 10^{-7}$ ne sont pas cohérents avec la physique. Une des explications est que le modèle de contact n'étant valable qu'en élastodynamique et que l'on est dans une zone où commencent à apparaître des déformations plastiques (Pression supérieure à 1GPa). On ne peut alors plus appliquer le modèle. D'autre part, l'introduction de la variable \bar{k} va modifier les pressions du modèle hydrodynamique, en imposant, dans le cas où l'on coupe la surface partout sous le segment, un $h = \bar{k}$.

Il est donc important de bien choisir le paramètre KT de la force de contact, ainsi que le plan moyen. Pour la suite, nous avons choisi de prendre la variable KT du code interne Renault, afin de pouvoir comparer le cas échéant avec les résultats issus de bancs d'essais. Pour L1, nous obtenons d'ailleurs quasiment les mêmes coefficients de frottement pour la variable KT du code Renault que pour celle de Tomanik. Or cette dernière semble la plus réaliste des 3 valeurs de la littérature, elle est du même ordre de grandeur que celle issue de nombreuses mesures décrites par Tomanik ([TN01],[Tom05]).

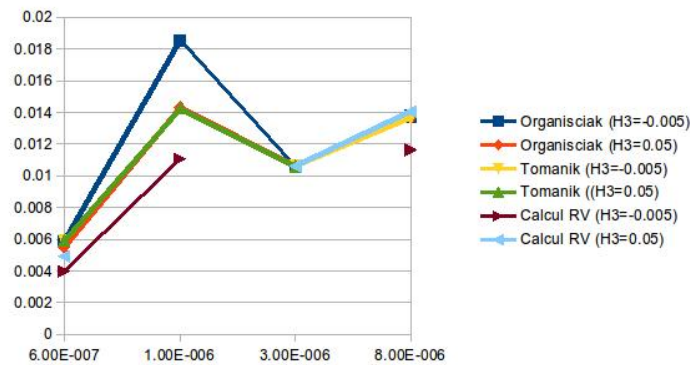
3.4.3 Comparaison des surfaces pour différents débits d'entrée

Une des dernières étapes est de corrélérer les résultats du modèle mathématique avec des essais effectués par Renault. Lors de ces essais, le débit d'huile est assuré par un compte goutte. Il n'y eut donc pas un débit régulier de $2\mu m$, comme nous l'imposons dans le modèle mathématique. Pour prendre cette

3.4. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE CALCUL



(a) Courbes de Stribeck pour L1 (Mesure = paramètres issus du code de lubrification Renault)



(b) Courbes de Stribeck pour L3

FIGURE 3.41 – Courbes de Stribeck pour différents plan et différentes valeurs de la constante KT pour L1 et L3

différence en compte entre la réalité et la simulation numérique, nous avons imposé les débits :

- $\theta_{(x=0,y=0,t)} h_{(x=0,y=0,t)} = 1\mu m$
- $\theta_{(x=0,y=0,t)} h_{(x=0,y=0,t)} = 2\mu m$
- $\theta_{(x=0,y=0,t)} h_{(x=0,y=0,t)} = 3\mu m$

La géométrie du segment est la même que celle prise lors des essais (segment type A). Pour la loi de contact, les valeurs du plan moyen et du σ issues des mesures faites par Renault ont été prises. . Les résultats sont présentés sous la forme d'une courbe de Stribeck (figure 3.42).

Ces expériences montrent que le débit a une grande influence dans la partie hydrodynamique de la courbe de Stribeck (figure 3.42). En effet, pour un débit de $2\mu m$, la surface L3 apparaît moins performante. Contrairement à la surface L3, la surface L1 a tendance à avoir un frottement moindre lorsque le débit diminue.

La courbe de Stribeck permet de mettre en évidence les caractéristiques des deux surfaces. Ainsi L1 est plus performant en hydrodynamique que L3, mais atteint plus rapidement un régime mixte. Cette tendance se confirme sur les essais effectués au tribomètre. (figure 3.43)

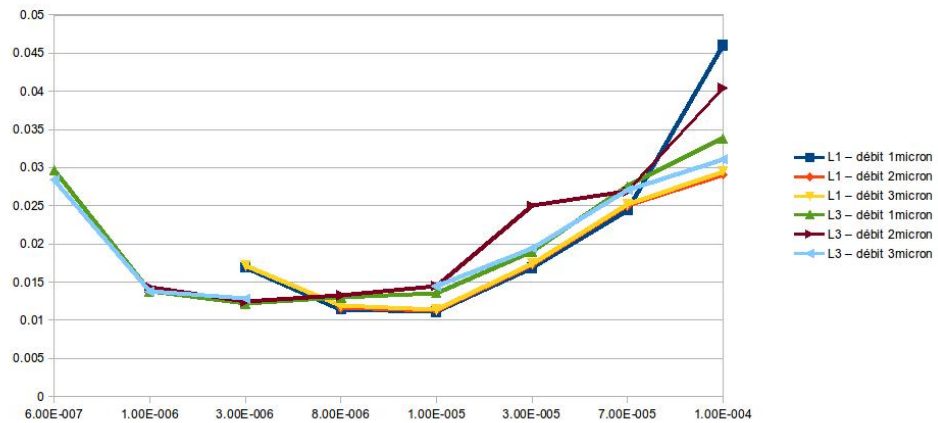


FIGURE 3.42 – Courbes de Stribeck pour L1 et L3 pour différents débits

Bien qu'il y ait un écart important entre les frottements mesurés et ceux issus de la simulation, la tendance constatée reste similaire.

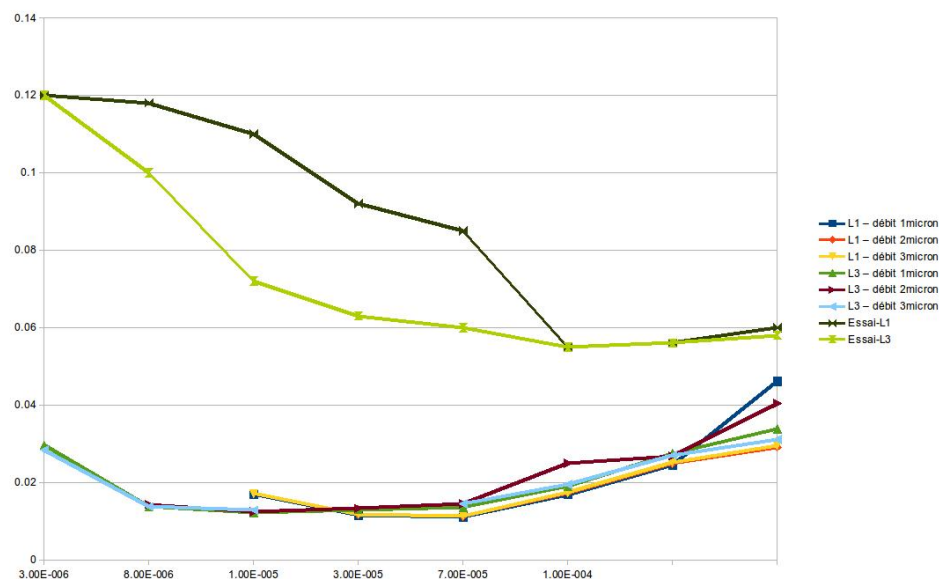


FIGURE 3.43 – Comparaison entre les frottements issus des essais et ceux issus de la simulation numérique pour les surfaces L1 et L3 entre les essais et la simulation

Actuellement, le modèle sous estime les forces de frottement en hydrodynamique comme en régime mixte. On pourra dans l'avenir ajuster les constantes de la loi de Greenwood-Williamson-Tripp afin d'augmenter les frottements dus aux forces de contact. On peut aussi remettre en question la manière dont les forces de frottements sont calculées dans le modèle, notamment sur les effets des zones de cavitation qui entraînent des forces de frottements très instables numériquement.

3.4.4 Estimation des pressions et des hauteurs de film

Le modèle $(P - \theta)$ permet d'estimer les pressions locales et les quantités locales de film d'huile ce qui est difficilement mesurable localement sur des essais. Bien que le modèle mathématique permet de comparer différentes surfaces entre elles, il peut aussi donner des informations importantes notamment sur la localisation des forces du système Piston / Segment / Chemise.

Les forces de contact, les pressions hydrodynamiques, et les hauteurs de film d'huile sont présentées pour 2 points de la courbe de Stribeck précédente (figure 3.42), pour un débit d'entrée de $1\mu m$, pour les surfaces L1 et L3. Les points choisis sont :

1. $W_a = 200 N.m^{-1}$, régime hydrodynamique pur (figures 3.46–3.47),
2. $W_a = 13\,333 N.m^{-1}$, régime mixte (figures 3.44–3.45).

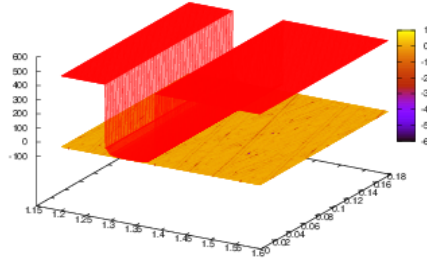
Ces vues en 2-dimensions (figure 3.44–3.47) des pressions et des hauteurs d'huile permettent de comprendre l'importance de la texturation de la chemise et les enjeux pour le système Piston / Segment / Chemise.

À forte charge $W_a = 13\,333 N.m^{-1}$, la quantité de lubrifiant laissée par le segment est beaucoup moins importante dans le cas de L1 (quantité inférieure à $2\mu m$ pour L1, et supérieurs à $3\mu m$ pour L3). Cette quantité d'huile est localisée dans les stries de la surface. On constate aussi une accumulation de lubrifiant devant le segment. Ce qui peut venir perturber la condition limite en entrée si la distance entre ce bord et le segment est trop faible.

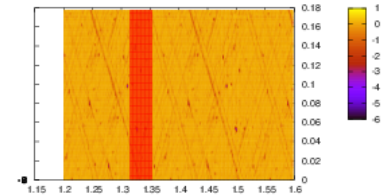
Les forces de contact et les forces hydrodynamiques sont très localisées sur la surface de calcul. Elles se situent respectivement au milieu du segment (autour du minimum de la géométrie), et dans la partie convergente du segment type A. Pour la surface L1, l'équilibre du système est essentiellement assuré par la force de contact, contrairement à la surface L3, dont la contribution hydrodynamique est plus importante et répartie sur la longueur du segment.

À faible charge $W_a = 200 N.m^{-1}$, les forces de contact sont nulles. Le système s'équilibre uniquement avec la pression du fluide. Pour L1, cette pression est très localisée et avec un maximum à $4E7 Pa$. Tandis que pour L3, la pression est répartie sur tout le segment ce qui permet d'avoir des pressions beaucoup moins importantes $1.2E7 Pa$.

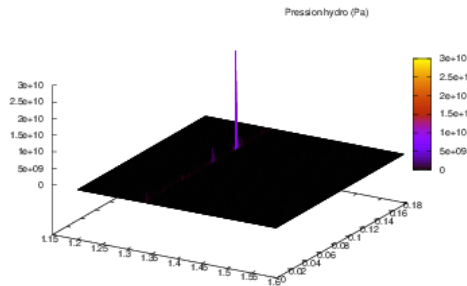
Cependant le hauteur du lubrifiant restant sur la chemise est plus régulier pour la surface L1 (couche d'épaisseur uniforme), on pourrait donc s'attendre à une meilleure répartition des pressions sur le segment, mais ce n'est le cas. Au contraire la quantité de fluide contenue dans les stries pour L3 devient des réserves d'huile pour soutenir le segment, et l'on a alors la plus grande zone de pression. Les stries semblent donc jouer aussi un rôle important dans la répartition des pressions hydro.



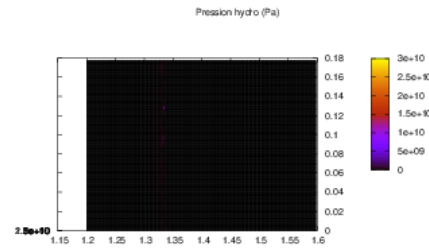
(a) surface L1



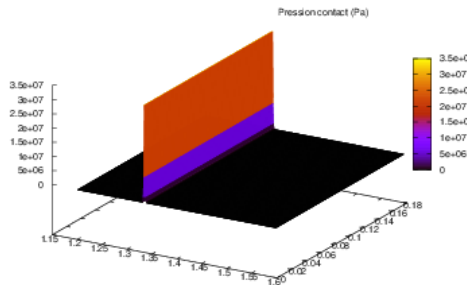
(b) surface L1, vu de dessus



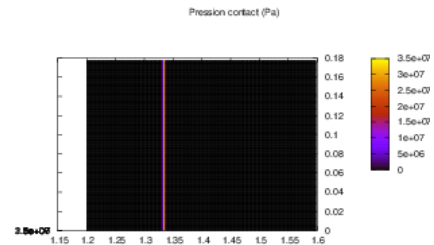
(c) Pression hydrodynamique



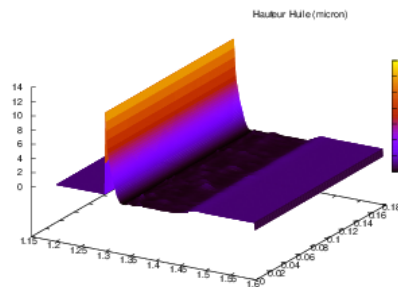
(d) Pression hydrodynamique, vu de dessus



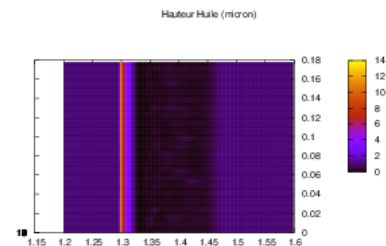
(e) Pression de contact



(f) Pression de contact, vu de dessus



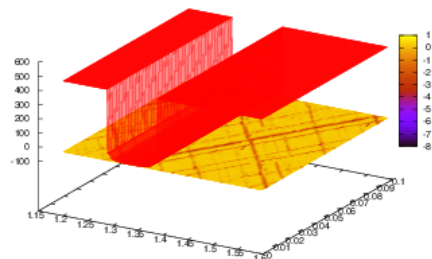
(g) Hauteur de lubrifiant



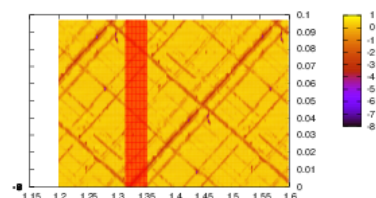
(h) Hauteur de lubrifiant, vu du dessus

FIGURE 3.44 – Estimation des pressions et de la hauteur d'huile pour la surface L1 pour une charge appliquée $W_a = 13\,333\text{N.m}^{-1}$

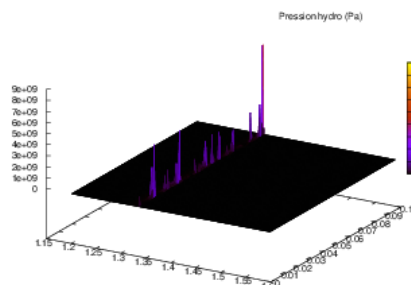
3.4. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE CALCUL



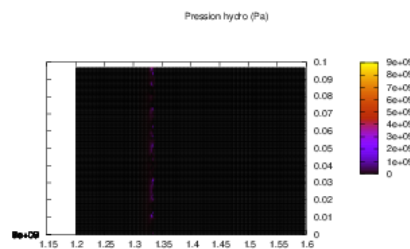
(a) surface L3



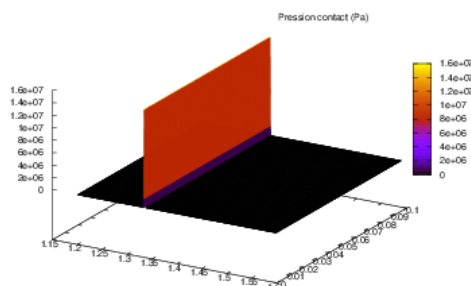
(b) surface L3, vu de dessus



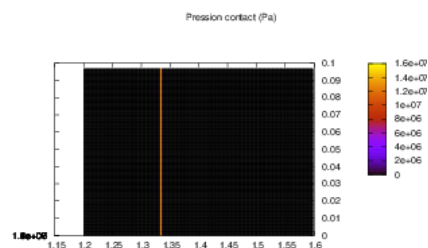
(c) Pression hydrodynamique



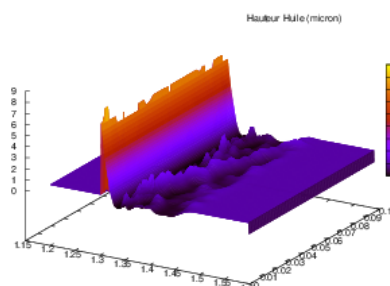
(d) Pression hydrodynamique, vu de dessus



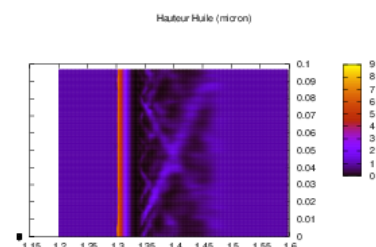
(e) Pression de contact



(f) Pression de contact, vu de dessus

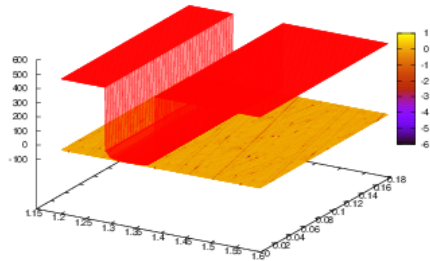


(g) Hauteur de lubrifiant

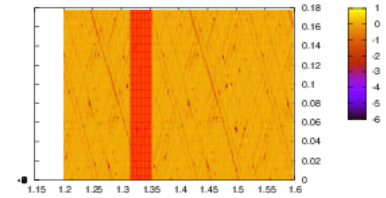


(h) Hauteur de lubrifiant, vu du dessus

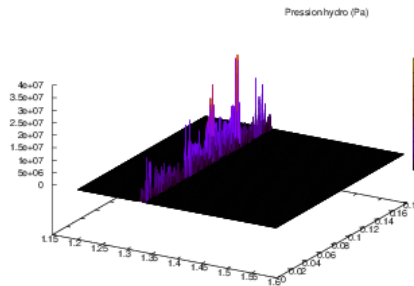
FIGURE 3.45 – Estimation des pressions et de la hauteur d'huile pour la surface L3 pour une charge appliquée $W_a = 13\,333\text{N.m}^{-1}$



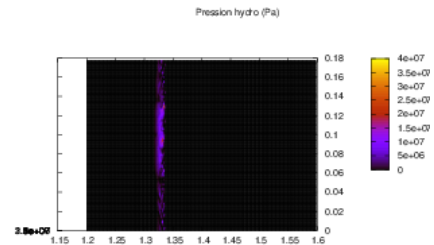
(a) surface L1



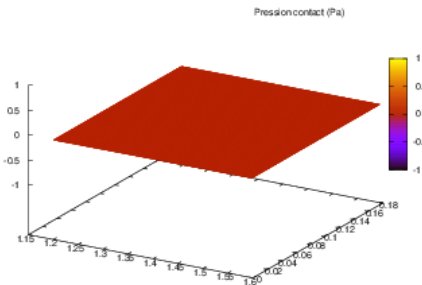
(b) surface L1, vu de dessus



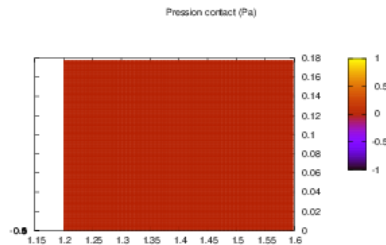
(c) Pression hydrodynamique



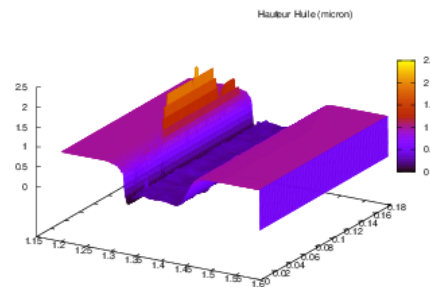
(d) Pression hydrodynamique, vu de dessus



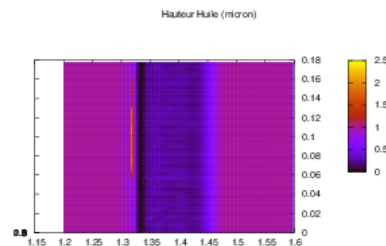
(e) Pression de contact



(f) Pression de contact, vu de dessus



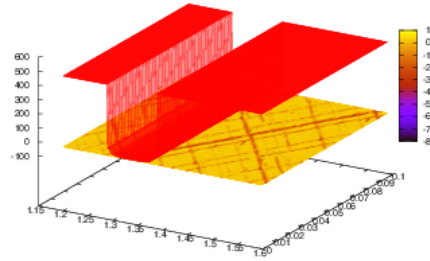
(g) Hauteur de lubrifiant



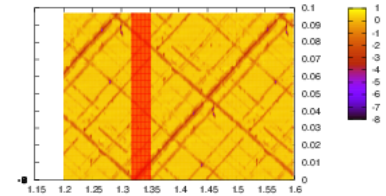
(h) Hauteur de lubrifiant, vu du dessus

FIGURE 3.46 – Estimation des pressions et de la hauteur d'huile pour la surface L1 pour une charge appliquée $W_a = 200N.m^{-1}$

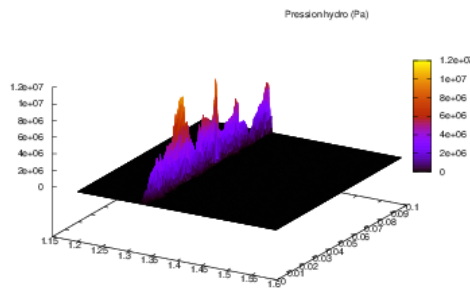
3.4. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE CALCUL



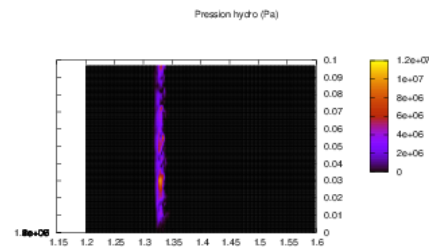
(a) surface L3



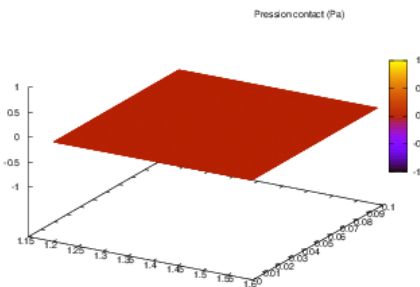
(b) surface L3, vu de dessus



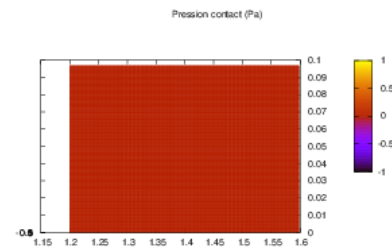
(c) Pression hydrodynamique



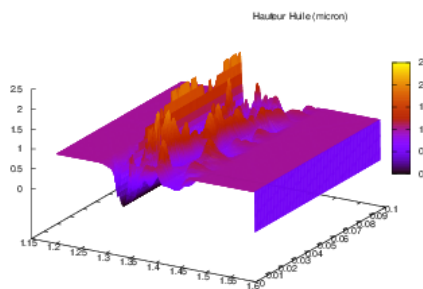
(d) Pression hydrodynamique, vu de dessus



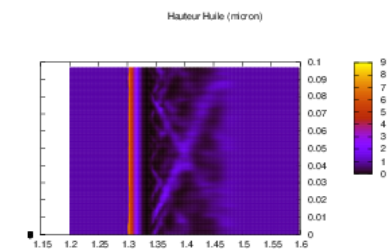
(e) Pression de contact



(f) Pression de contact, vu de dessus



(g) Hauteur de lubrifiant



(h) Hauteur de lubrifiant, vu du dessus

FIGURE 3.47 – Estimation des pressions et de la hauteur d'huile pour la surface L3 pour une charge appliquée $W_a = 200N.m^{-1}$

Conclusion

Le modèle ($P - \theta$) couplé au modèle de contact de Greenwood-Williamson-Tripp permet de mettre en évidence les propriétés des géométries mises en mouvement relatif et séparées par du lubrifiant. Cette simulation permet de localiser les lieux de fortes pressions ainsi que les quantités de fluides qui resteront après le passage du segment. Ce sont des informations primordiales pour estimer l'usure future du moteur ou les probabilités de grippage.

Cependant la sensibilité des données du problème, tant au niveau de la discrétisation que des paramètres physiques intervenant dans la loi de contact, est grande. Un simple filtre utilisé sur la surface du maillage après la surfométrie peut changer le plan moyen et l'écart type associé. Cela changerait les résultats de la loi de contact et donc l'équilibre des forces pouvant donner ainsi des tendances contradictoires.

Ce type de modèle donne des tendances sur le comportement du système assez semblable aux essais. Par exemple, la surface L1 est meilleure que L3 en régime hydrodynamique mais L3 est meilleure en régime mixte. Toutefois le problème global reste très lent à résoudre. Ceci est dû à la non-linéarité du modèle et à la méthode utilisée pour le résoudre (tableau 3.6). Des optimisations numériques peuvent être envisagées comme l'utilisation de solveur parallèle mais le gain est limité et des instabilités peuvent apparaître [VK90]. Des temps indicatifs de résolution du système pour un point de la courbe de Stribeck sont présentés dans le tableau 3.6. Pour une courbe de Stribeck totale, il faut au minimum 8 points.

Compilateur	À forte charge	À faible charge
GCC	3 semaines	4 jours
Intel compiler	3 jours	1 jour

TABLE 3.6 – Temps de convergence moyen pour un point de la courbe de Stribeck (temps compter jusqu'à stabilisation du système)

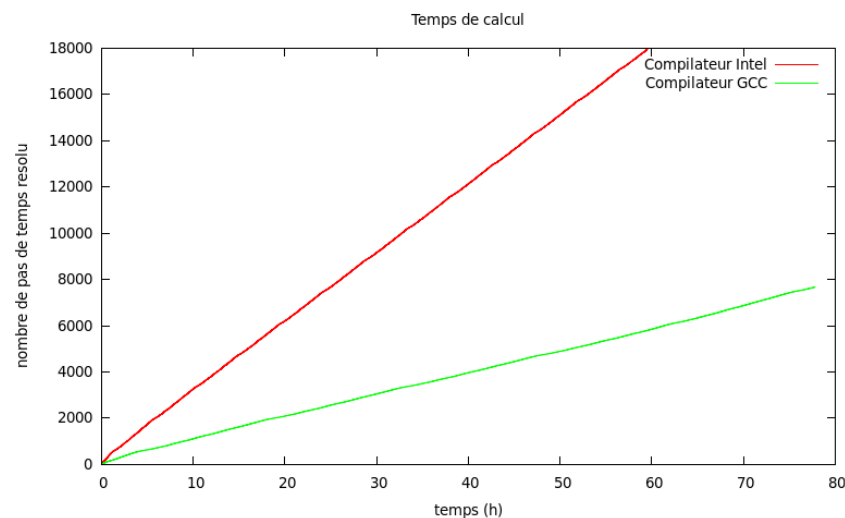


FIGURE 3.48 – Comparaison du temps de résolution pour le même programme pour les deux compilateurs (ICPC et G++) avec l'option -O3 à faible charge ($200N.m^{-1}$)

La différence de temps entre les deux compilateurs est due à une bibliothèque mathématique mieux optimisée et à une meilleure utilisation des caractéristiques du processeur dans le cas du compilateur

3.4. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DE CALCUL

Intel. D'autre part, nous pouvons voir que les temps de résolutions du système ne sont pas linéaire dans le cas fortement chargé (figure 3.49).

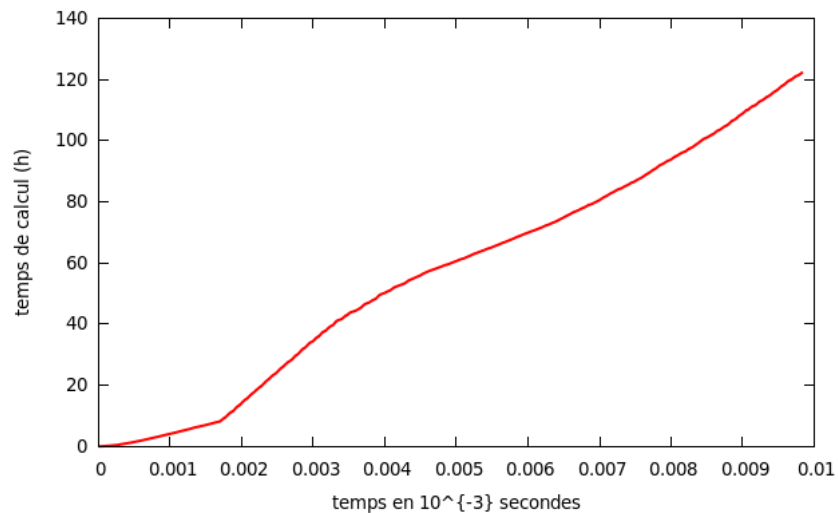


FIGURE 3.49 – Temps de résolution pour L3 à forte charge ($13\,333\text{N.m}^{-1}$) pour un maillage de 800×300 et un pas de temps de $\frac{1}{80000}$

Enfin le modèle de cavitation utilisé pose problème pour la résolution du système avec plusieurs segments proches, car la vitesse du débit en sortie n'est pas cohérente avec la hauteur de fluide considérée " θh ".

CHAPITRE 4

NOUVEAU MODÈLE DE CAVITATION

4.1 Un nouveau modèle de cavitation

Dans le modèle $(P - \theta)$ (section 1.9.4), le comportement du lubrifiant dans la zone cavitée est décrit par la variable globale " θ " qui vérifie l'équation de conservation (4.1).

$$\frac{\partial \theta h}{\partial t} + \frac{S}{2} \frac{\partial \theta h}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

Dans certaines situations, on a observé que le fluide adhère dans la zone cavitée à la surface mobile qui a une vitesse S . L'écoulement devrait donc pouvoir être décrit par une couche de hauteur H qui évolue à une vitesse uniforme S . Une première idée est de définir $H = \theta h$ [Org07]. Cependant l'équation de conservation s'exprime alors :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{S}{2} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

Ce qui implique que cette couche s'écoule avec une vitesse $\frac{S}{2}$ au lieu de S .

Nous avons donc été amenés à modifier le modèle classique afin qu'il puisse prendre en compte cette physique de l'écoulement tout en conservant sa propriété fondamentale de conservation globale de la masse. Ceci nous a amenés à introduire un paramètre $a \in [\frac{1}{2}, 1]$, qui prend en compte la différence de vitesse entre la zone de film plein (pressurisée) et la zone cavitée.

Nous considérons ici le cas d'un problème en dimension 1 ($\Omega =]0, 1[$) avec une géométrie convergente-divergente définie par $y = h(x)$, avec $x \in \Omega$. On notera γ l'abscisse du minimum de h .

La surface inférieure ($y = 0$) est animée d'une vitesse horizontale S et la surface supérieure est fixe.

La zone non cavitée (ou pressurisée) est définie par :

$$\Omega_+(t) = \{x \in \Omega / p(x, t) > p_s\} \quad (4.3)$$

où p_s est une pression de "saturation" connue qui sera prise égale à 0 pour la suite. La zone cavitée est définie par :

$$\Omega_0(t) = \{x \in \Omega / p(x, t) = 0\} \quad (4.4)$$

4.1. UN NOUVEAU MODÈLE DE CAVITATION

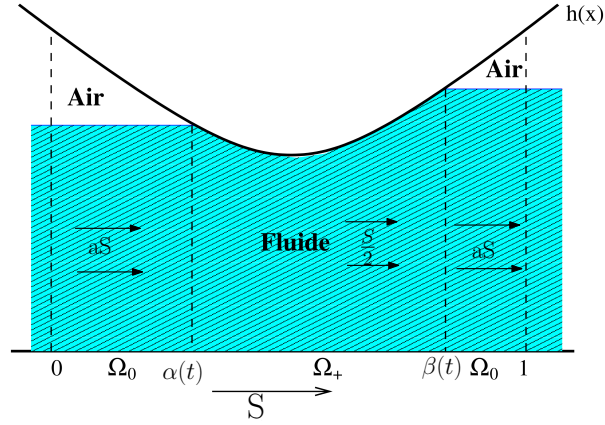


FIGURE 4.1 – Représentation du domaine Ω et des différentes zones

Cette zone $\Omega_+(t)$ est supposée connexe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_+(t) = [\alpha(t), \beta(t)] \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \alpha(t) < \gamma \\ \beta(t) > \gamma \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_m = S a & \text{sur } \Omega_0(t) \\ u_m = \frac{S}{2} & \text{sur } \Omega_+(t) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

où a est un paramètre à choisir au mieux. $a \in [\frac{1}{2}, 1]$. Après adimensionnement de la pression, le problème (Equation 1.7) s'écrit :

Trouver $\alpha(t), \beta(t), p(x, t), \Theta(x, t)$ tels que :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = u_m \frac{\partial \Theta h}{\partial x} + \frac{\partial \Theta h}{\partial t} \quad \text{sur } \Omega \quad (4.7)$$

$$p(x, t)(1 - \Theta(x, t)) = 0 \quad (4.8)$$

$$p(x, t) \geq 0 \quad (4.9)$$

$$\Theta(x, t) \in [0, a] \cup \{1\} \quad (4.10)$$

Définition 4.1.1 (Domaines de définition de Θ). La variable Θ , représentant le pourcentage de fluide adhérent à la paroi, s'exprime :

$$\Theta(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_+ \text{ (dans la zone active)} \\ < 1 & \text{si } x \in \Omega_0 \text{ (dans la zone cavitée)} \end{cases}$$

L'équation (4.7) peut se décomposer en :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3(x) \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{S}{2} \frac{\partial h(x)}{\partial x} \quad \text{sur }]\alpha(t), \beta(t)[\quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \Theta(x, t) h(x)}{\partial t} + a S \frac{\partial \Theta(x, t) h(x)}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } [0, \alpha(t) \cup]\beta(t), 1[\quad (4.12)$$

$$\alpha'(t) h(\alpha) [1 - \Theta(\alpha^-, t)] = -h^3(\alpha) \frac{\partial p}{\partial x}(\alpha^+, t) + h(\alpha) [u_m(\alpha^+) - u_m(\alpha^-) \Theta(\alpha^-, t)] \quad \text{en } \alpha(t) \quad (4.13)$$

$$\beta'(t) h(\beta) [1 - \Theta(\beta^+, t)] = -h^3(\beta) \frac{\partial p}{\partial x}(\beta^-, t) + h(\beta) [u_m(\beta^-) - u_m(\beta^+) \Theta(\beta^+, t)] \quad \text{en } \beta(t) \quad (4.14)$$

Les conditions initiales et limites sont :

$$p(\alpha(t), t) = 0 \quad (4.15)$$

$$p(\beta(t), t) = 0 \quad (4.16)$$

$$\Theta(0, t) = \Theta_{IN} \quad (4.17)$$

$$\Theta(x, 0) = \Theta_0 \quad (4.18)$$

$$p(0, t) = p(1, t) = 0 \quad (4.19)$$

Nous ferons par la suite l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.1.2 (Conditions imposées sur h). $h(x)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 strictement décroissante sur $[0, \gamma]$ et strictement croissante sur $[\gamma, 1]$, $\gamma \in]0, 1[$.

Nous allons poser ce problème de telle manière que $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ deviennent les inconnues principales en éliminant la pression :

Dans la partie film plein (Ω_+), entre α et β , nous intégrons l'équation (4.11) sur $[\alpha(t), x]$, avec $x \in]\alpha(t), \beta(t)[$.

$$h^3 \partial_x p = \frac{S}{2} h + C_{(t)} \quad (4.20)$$

Où $C(t)$ est une constante d'intégration, que nous cherchons à déterminer.

D'où :

$$\partial_x p = \frac{1}{h^3} \left(\frac{S}{2} h + C_{(t)} \right)$$

En intégrant sur $[\alpha(t), \beta(t)]$:

$$p(\beta) - p(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{h^3} \left(\frac{S}{2} h + C_{(t)} \right) dx$$

Or $p = 0$ en α et en β , d'après l'hypothèse 4.15.

4.1. UN NOUVEAU MODÈLE DE CAVITATION

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{h_{(x,t)}^3} \left(\frac{S}{2} h_{(x,t)} + C_{(t)} \right) dx = 0$$

Nous obtenons alors :

$$C_{(t)} = C_{(h_{(x,t)}, \alpha, \beta)} = \frac{-\frac{S}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{h_{(x)}^2} dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{h_{(x)}^3} dx} \quad (4.21)$$

Pour simplifier les notations, nous posons :

$$G(\alpha(t), \beta(t)) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{h_{(x)}^2} dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{h_{(x)}^3} dx} \quad (4.22)$$

L'expression de la dérivée de la pression devient :

$$h^3 \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = \frac{S}{2} (h(x) - G(\alpha(t), \beta(t))) \quad (4.23)$$

Les équations (4.13)-(4.14) se réécrivent alors :

$$\alpha'(t) \cdot h(\alpha) \cdot [1 - \Theta(\alpha^-, t)] = \frac{S}{2} \left[G(\alpha(t), \beta(t)) - 2a \Theta(\alpha^-, t) h(\alpha) \right] \quad (4.24)$$

$$\beta'(t) \cdot h(\beta) \cdot [1 - \Theta(\beta^+, t)] = \frac{S}{2} \left[G(\alpha(t), \beta(t)) - 2a \Theta(\beta^+, t) h(\beta) \right] \quad (4.25)$$

Remarque 1. Dans le cas où $\Theta(\alpha(t), t) = \Theta(\beta(t), t) = 1$, les équations (4.24)-(4.25) peuvent être résolues de manière algébrique, car d'après les hypothèses faites sur $\alpha \in [0, \gamma]$ et $\beta \in [\gamma, 1]$ et sur h sur ces intervalles dans l'hypothèse 4.1.2. Nous pouvons déterminer leur position en résolvant le système suivant :

$$\alpha(t) = h^{-1} \left(\frac{1}{2a} G(\alpha(t), \beta(t)) \right) \quad (4.26)$$

$$\beta(t) = h^{-1} \left(\frac{1}{2a} G(\alpha(t), \beta(t)) \right) \quad (4.27)$$

$$\alpha(t) < \beta(t) \quad (4.28)$$

dont il est facile d'étudier l'existence en fonction des valeurs de $\min h(x) = \gamma$, de G et des domaines de définition de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

4.1.1 Conditions limites en $x = 1$

Pour que le problème soit bien posé, il pourra être nécessaire d'introduire une conditions aux limites pour Θ en $x = 1$.

Nous allons montrer que suivant que $\beta' \geq aS$ [cas dit de "reformation" qui intervient lorsqu'on a un choc dans la résolution de l'équation (4.12)] ou $\beta' < aS$ [cas dit de "rupture" qui intervient lorsqu'on a une détente dans la résolution de l'équation (4.12)], il sera nécessaire d'introduire ou non une telle condition aux limites.

Cas de reformation en $\beta(t)$

Nous allons commencer par présenter le cas le plus simple, celui de la reformation de fluide en $\beta(t)$. Dans ce cas là, nous avons $\beta' \geq aS$. On peut alors résoudre l'équation (4.12) à l'aide de la méthode des caractéristiques connaissant $\Theta(x, 0)$. La ligne caractéristique s'exprime par :

$$t' \mapsto \beta(t) + aS(t - t') \quad \forall t' \in]0, t] \quad (4.29)$$

Deux situations peuvent apparaître :

1. le cas où nous calculons à partir de la condition initiale.(figure 4.2(a))

$$\beta(t) + aS(t' - t) \geq \beta(t'), \forall t' \in [0, t[$$

La méthode des caractéristiques nous donne immédiatement :

$$\Theta(\beta^+, t) h(\beta^+) = \Theta(\beta(t) - aSt, 0) h(\beta(t) - aSt)$$

D'où :

$$\Theta(\beta^+, t) = \frac{\Theta(\beta(t) - aSt, 0) h(\beta(t) - aSt)}{h(\beta^+)} \quad (4.30)$$

2. le cas où nous calculons à partir d'une solution antérieure (figure 4.2(b))

$$\exists t_1 \in]0, t[\text{ tel que}$$

$$\begin{aligned} \beta(t) + aS(t_1 - t) &= \beta(t_1) & \forall t_1 \in]0, t[\\ \beta(t) + aS(t' - t) &> \beta(t') & \forall t' \in]t_1, t[\end{aligned}$$

La valeur de $\Theta(\beta, t)$ sera donc déterminée à partir de celle de $\Theta(\beta, t_1)$.

$$\Theta(\beta^+, t) = \frac{\Theta(\beta, t_1) h(\beta(t_1))}{h(\beta(t))} \quad (4.31)$$

Il est donc possible de connaître une solution $\Theta(x, t)$ sur $[\beta(t), 1]$ quelque soit t dès lors que l'on connaît $\Theta(\beta(t_1), t_1) \in \Omega_0(t_1) \forall t_1 \in [0, t[$.

Cas de rupture en $\beta(t)$

Pour le cas de rupture, il faut imposer une valeur à $\Theta(\beta)$ puisqu'il est impossible de la déterminer à partir de la condition initiale ou d'une valeur antérieure(figure 4.3).

4.1. UN NOUVEAU MODÈLE DE CAVITATION

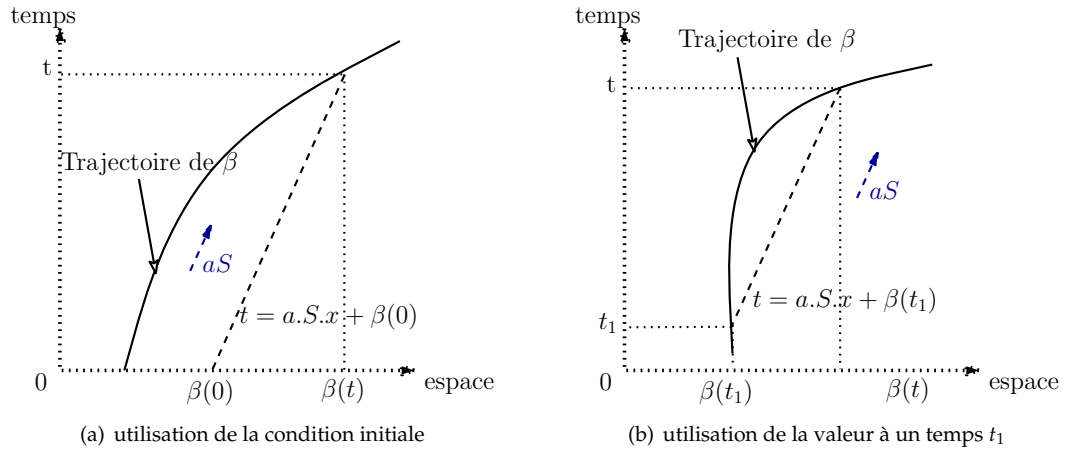


FIGURE 4.2 – Représentation de la trajectoire de $\beta(t)$ au cours du temps et de la ligne caractéristique à $t = 0$

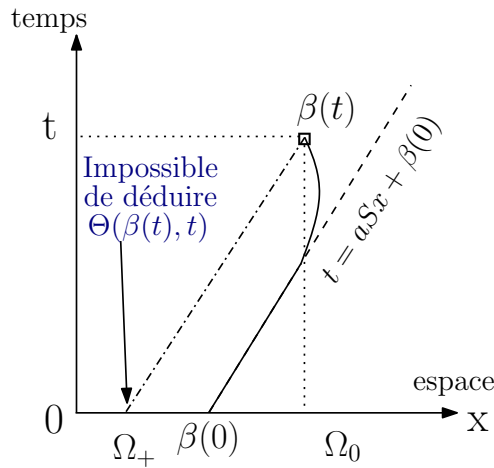


FIGURE 4.3 – Problème de la détermination de $\Theta(\beta(t), t)$ dans le cas rupture

Afin de trouver cette condition, nous avons tout d'abord cherché des bornes pour $\Theta(x, t)$. Pour cela, nous avons exprimé $\Theta(\beta, t)$ à partir de l'équation (4.25).

$$\Theta(\beta, t) = \frac{\frac{S}{2} G(\alpha(t), \beta(t)) - \beta'(t) h(\beta(t))}{a S h(\beta(t)) - \beta'(t) h(\beta(t))} \quad (4.32)$$

Pour borner cette équation, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 4.1.3 (Condition de positivité de la pression). *La pression p est positive ou nulle entre α et β si et seulement si : $\forall x \in [\alpha, \beta]$*

$$h(\beta) \leq G(\alpha, \beta) \leq h(\alpha) \quad (4.33)$$

Démonstration. D'après (4.23), nous avons :

$$h^3 \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \frac{S}{2} \left(h(x) - G(\alpha, \beta) \right)$$

- si $p(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$ alors $\frac{\partial p}{\partial x}(\alpha) \geq 0$ et $\frac{\partial p}{\partial x}(\beta) \leq 0$ ce qui donne (4.33).
- si nous supposons que (4.33) est satisfaite, alors la fonction $x \mapsto h(x) - G(\alpha(t), \beta(t))$ doit changer de signe sur $[\alpha, \beta]$. Si $\partial_x p$ ne change pas de signe, la pression serait nulle sur Ω_+ car d'après l'hypothèse 4.15, $p(\alpha) = p(\beta) = 0$, ce qui contredirait la définition de Ω_+ .

De l'hypothèse 4.1.2 sur h , cette fonction peut changer au plus deux fois de signe. Mais comme $h(\alpha) - G(\alpha, \beta) \geq 0$ et $h(\beta) - G(\alpha, \beta) \leq 0$ alors $x \mapsto h(x) - G(\alpha, \beta)$ change une fois de signe et ceci montre que $p(x) \geq 0 \forall x \in [\alpha, \beta]$.

□

Nous bornons l'équation (4.32) à l'aide de l'inégalité (4.33). D'où :

$$\frac{\frac{S}{2}h(\alpha(t)) - \beta'(t)h(\beta(t))}{aSh(\beta(t)) - \beta'(t)h(\beta(t))} \geq \Theta(\beta^+, t) \geq \frac{\frac{S}{2} - \beta'(t)}{aS - \beta'(t)} \quad (4.34)$$

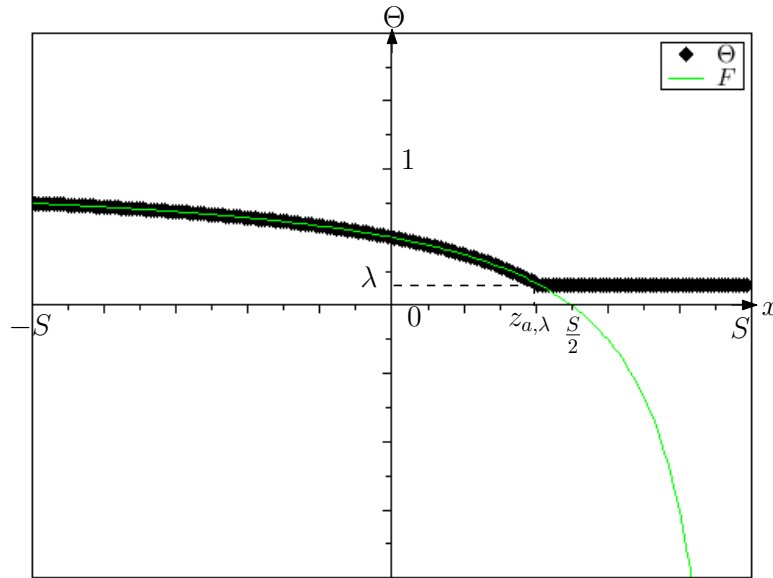


FIGURE 4.4 – Représentation de $F(x)$ et $\Theta(x, t)$ en fonction de $x = \beta^+$

Étudions le minorant de $\Theta(\beta, t)$, nous posons pour cela :

$$\begin{aligned} F :]-\infty, aS[&\longrightarrow]-\infty, 1[\\ z &\longmapsto \frac{\frac{S}{2} - z}{aS - z} \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.2. EXISTENCE ET UNICITÉ DU NOUVEAU MODÈLE

La fonction F est définie sur $] -\infty, aS[$, car $\beta'(t) < aS$. Cette dernière est négative sur $[\frac{S}{2}, a[$, or $0 < \Theta < 1$. Nous allons donc imposer un nouveau minorant à Θ que l'on notera λ . Comme l'on veut que Θ soit continue, nous prenons comme valeur de Θ le maximum entre la fonction F et λ .

Pour $z \in [\frac{S}{2}, aS]$, la fonction F est négative. $\Theta(x, t)$ ne pouvant être négative, nous allons introduire la variable λ . De façon à être cohérent, on impose à $\Theta(x, t)$ d'être supérieur à une valeur minimale λ , pour tout $\beta' < aS$ et $\forall t \in [0, T]$.

Hypothèse 4.1.4 (Condition dans le cas rupture). *Nous proposons :*

$$\Theta(\beta^+, t) = \max \left\{ F(\beta'(t)), \lambda \right\} \quad (4.36)$$

avec λ , une constante choisie au mieux. Nous supposons, pour simplifier :

$$\lambda < \frac{1}{2a} \quad (4.37)$$

4.2 Existence et unicité du nouveau modèle

Nous reformulons ici le nouveau modèle comme système d'équation d'inconnues $\alpha(t), \beta(t)$. C'est pour ce modèle que nous exposerons un théorème d'existence et d'unicité.

Trouver $(\alpha, \beta) \in A_1$ tel que :

$$\alpha'(t).h(\alpha) \cdot [1 - \Theta(\alpha^-, t)] = \frac{S}{2} \left[G(\alpha(t), \beta(t)) - 2a \Theta(\alpha^-, t) h(\alpha) \right] \quad \text{sur } [0, \gamma] \quad (4.38)$$

$$\beta'(t).h(\beta) \cdot [1 - \Theta(\beta^+, t)] = \frac{S}{2} \left[G(\alpha(t), \beta(t)) - 2a \Theta(\beta^+, t) h(\beta) \right] \quad \text{sur } [\gamma, 1] \quad (4.39)$$

$$h(\beta) \leq G(\alpha, \beta) \leq h(\alpha) \quad (4.40)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \quad (4.41)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad (4.42)$$

$$\Theta(x, 0) = \Theta_0 \quad (4.43)$$

$$\Theta(0, t) = \Theta_{In} \quad (4.44)$$

$$\Theta(\beta', t) = \max \left\{ F(\beta'(t)), \lambda \right\} \quad \text{si } \beta' < aS \quad (4.45)$$

avec

$$F(z) = \frac{\frac{S}{2} - z}{aS - z} \quad (4.46)$$

$$G(\alpha, \beta) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{h_{(x)}^2} dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{h_{(x)}^3} dx} \quad (4.47)$$

$$A_1 = \{ (\alpha, \beta) \mid 0 < \alpha < \gamma < \beta < 1 \text{ et } p_{\alpha, \beta}(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha, \beta] \} \quad (4.48)$$

$$= \{ (\alpha, \beta) \mid 0 < \alpha < \gamma < \beta < 1 \text{ et } h(\beta) \leq G(\alpha, \beta) \leq h(\alpha) \} \quad (4.49)$$

Remarque 2. La condition $(\alpha(t), \beta(t)) \in A_1$ est liée à la positivité de la pression sur $[\alpha(t), \beta(t)]$. (cf lemme 4.1.3)

4.2.1 Définition des zones admissibles

Nous utiliserons dans la suite les formules suivantes :

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \frac{G(\alpha, \beta) - h(\alpha)}{h^3(\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{h^3(\xi)} d\xi} \quad \frac{\partial G}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \frac{h(\beta) - G(\alpha, \beta)}{h^3(\beta) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{h^3(\xi)} d\xi} \quad (4.50)$$

Ces formules nous montrent que G est strictement décroissante en α et en β à l'intérieur de A_1 , car $G(\alpha, \beta) \in [h(\beta), h(\alpha)]$ d'après le lemme 4.1.3.

Remarquons aussi que nous pouvons prolonger $G(\alpha, \beta)$ par continuité en (γ, γ) en posant :

$$G(\gamma, \gamma) = h(\gamma) \quad (4.51)$$

Afin d'étudier les différents cas possibles pour des pressions positives, nous allons introduire la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : [0, \gamma] \times [\gamma, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\xi}{h^2(\xi)} - h(\beta) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\xi}{h^3(\xi)} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Car étudier le signe de $\partial_x p$ revient à étudier le signe de f .

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = \frac{S}{2h^3(x)} \left[h(x) - G(\alpha(t), \beta(t)) \right]$$

Commençons par un lemme sur le signe de la dérivée de la pression.

Lemme 4.2.1. *Considérons deux cas suivants :*

- Si $f(0, 1) \leq 0$ alors $f(\alpha, 1) < 0 \forall \alpha \in]0, \gamma]$.
- Si $f(0, 1) > 0$ alors $\exists \bar{\alpha} \in]0, \gamma[, f(\alpha, 1) = \begin{cases} > 0 & \text{si } \alpha < \bar{\alpha} \\ = 0 & \text{si } \alpha = \bar{\alpha} \\ < 0 & \text{si } \alpha > \bar{\alpha} \end{cases}$

Démonstration. Soit $f_1 : [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}$. Donc $f_1(\alpha) = f(\alpha, 1) = \int_{\alpha}^1 \frac{d\xi}{h^2(\xi)} - h(1) \int_{\alpha}^1 \frac{d\xi}{h^3(\xi)}$
 $x \mapsto f(x, 1)$

D'où :

$$f_1'(\alpha) = -\frac{1}{h^2(\alpha)} + h(1) \frac{1}{h^3(\alpha)} = \frac{1}{h^3(\alpha)} [h(1) - h(\alpha)]$$

$$f_1(\gamma) = \int_{\gamma}^1 \frac{1}{h^3(x)} h(x) dx - h(1) \int_{\gamma}^1 \frac{1}{h^3(x)} dx < 0$$

car h est strictement croissante sur $[\gamma, 1]$ d'après l'hypothèse 4.1.2

Nous distinguons deux cas :

Cas 1 : $h(0) \leq h(1)$, alors $f_1'(\alpha) \geq 0, \forall \alpha \in]0, \gamma]$ car $h(\alpha) < h(0)$

Dans ce cas, il est clair que $f_1(\alpha) < 0, \forall \alpha \in [0, \gamma]$, car :

4.2. EXISTENCE ET UNICITÉ DU NOUVEAU MODÈLE

$$f_1(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{d\xi}{h^2} - h(1) \int_{\alpha}^1 \frac{d\xi}{h^3} \leq (h(\gamma) - h(1)) \int_{\alpha}^1 \frac{d\xi}{h^3(x)} < 0$$

Cas 2 : $h(0) > h(1)$, alors il existe $\hat{\alpha} \in]0, \gamma[$ tel que $h(\hat{\alpha}) = h(1)$ et donc f_1 est strictement décroissante sur $[0, \hat{\alpha}]$ et strictement croissante sur $[\hat{\alpha}, \gamma]$.

Ceci donne immédiatement le résultat. \square

Remarque 3. Les hypothèses sur la fonction h font que : $f(0, 1) \leq 0 \iff G(0, 1) \leq h(1)$

Nous avons la caractérisation suivante de A_1 :

Lemme 4.2.2 (Existence et unicité pour différents cas de $\partial_x p(1, t)$).

1) Si $G(0, 1) \leq h(1)$ alors $\forall \alpha \in]0, \gamma[$, il existe une solution unique $\beta^* = \beta^*(\alpha) \in]\gamma, 1[$ de l'équation :

$$G(\alpha, \beta^*) = h(\beta^*) \quad (4.53)$$

Dans ce cas :

$$A_1 = \{ (\alpha, \beta) \mid 0 < \alpha < \gamma \text{ et } \gamma < \beta \leq \beta^*(\alpha) \} \quad (4.54)$$

2) Si $G(0, 1) > h(1)$ alors il existe $\bar{\alpha} \in]0, \gamma[$ telle que

$\forall \alpha \in [\bar{\alpha}, \gamma[$, il existe une solution unique $\beta^* = \beta^*(\alpha) \in]\gamma, 1[$ de (4.53).

Dans ce cas :

$$A_1 = \left\{ (\alpha, \beta) \mid \bar{\alpha} \leq \alpha < \gamma \text{ et } \gamma < \beta \leq \beta^*(\alpha) \right\} \cup \left(]0, \bar{\alpha}] \times]\gamma, 1[\right) \quad (4.55)$$

Dans les deux cas, nous avons :

$$h(\beta^*(\alpha)) < h(\alpha) \quad \forall \alpha \quad (4.56)$$

Démonstration. Soit $\alpha \in [0, \gamma[$ fixé, alors trouver $\beta \in]\gamma, 1[$ tel que $G(\alpha, \beta) \geq h(\beta)$ revient à trouver $\beta \in]\gamma, 1[$ tel que $f(\alpha, \beta) \geq 0$ avec f donnée par (4.52).

Nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = -h'(\beta) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{h^3} < 0 \quad f(\alpha, \gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{1}{h^3(\xi)} h(\xi) d\xi - h(\gamma) \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{1}{h^3(\xi)} d\xi > 0$$

car $h(x) > h(\gamma)$ (hypothèse 4.1.2)

Si $f(0, 1) \leq 0$ alors d'après le lemme 4.2.1, nous avons $f(\alpha, 1) < 0$, $\forall \alpha < \gamma$ et donc il existe un unique $\beta^* = \beta^*(\alpha)$ solution de (4.53) et nous avons aussi :

$$G(\alpha, \beta) \geq h(\beta) \iff \beta < \beta^*(\alpha)$$

\square 1)

Si $f(0, 1) > 0$ du lemme 4.2.1, nous en déduisons que :

$$\alpha < \bar{\alpha} \implies G(\alpha, \beta) > h(\beta) \quad \forall \beta \in [\gamma, 1]$$

Si $\alpha \geq \bar{\alpha}$, nous avons les mêmes conclusions que dans le cas $f(0, 1) \leq 0$. \square 2)

Montrons maintenant (4.56). Supposons par l'absurde que $h(\beta^*) \geq h(\alpha)$. Cela entraîne :

$$f(\alpha, \beta^*(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta^*} \frac{h(\xi)}{h^3(\xi)} d\xi - h(\beta^*) \int_{\alpha}^{\beta^*} \frac{1}{h^3(\xi)} d\xi < 0$$

car $h(x) < h(\beta^*) \forall x \in]\alpha, \beta^*[$.

Ceci est contradictoire, car d'après la définition de $\beta^*(\alpha)$ (4.53), $f(\alpha, \beta^*(\alpha)) = 0$.

Il reste à démontrer que si A_1 est donnée par (4.54-4.55) alors $G(\alpha, \beta) \leq h(\alpha)$.

Si $(\alpha, \beta) \in A_1$ avec A_1 donnée par (4.54-4.55), cela implique $h(\beta) \leq G(\alpha, \beta)$ alors de (4.48), et donc $\frac{\partial G}{\partial \beta} \leq 0$.

Comme G est décroissante, il suffit de montrer que $G(\alpha, \gamma) \leq h(\alpha)$, c'est-à-dire :

$$\int_{\alpha}^{\gamma} \frac{d\xi}{h^2(\xi)} \leq h(\alpha) \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{d\xi}{h^3(\xi)}$$

Or $\frac{1}{h^2(x)} \leq \frac{1}{h^3(x)} h(\alpha) \forall x \in [\alpha, \gamma]$, cette inégalité est vérifiée. \square

Lemme 4.2.3 (Caractérisation de β^*). *La fonction β^* , définie dans le lemme 4.2.2, a les propriétés suivantes :*

- i) $\beta^* \in \mathcal{C}^1$
- ii) $(\beta^*(\alpha))' < 0$
- iii) $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow \gamma \\ \alpha < \gamma}} \beta^*(\alpha) = \gamma$

Démonstration. Nous savons que $\beta^*(\alpha)$ satisfait l'équation $f(\alpha, \beta^*(\alpha)) = 0$ (équation (4.53)), avec f définie par (4.52). Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial \beta}(\alpha, \beta^*(\alpha)) = -h'(\beta^*(\alpha)) \int_{\alpha}^{\beta^*} \frac{d\xi}{h^3(\xi)} < 0$$

Ceci nous donne par le théorème des fonctions implicites que $\beta^* \in \mathcal{C}^1$, car $f \in \mathcal{C}^1$ d'après l'hypothèse 4.1.2, d'où i).

D'autre part, nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, \beta^*) = \frac{h(\beta^*(\alpha)) - h(\alpha)}{h^3(\alpha)} < 0 \quad \text{d'après (4.56)}$$

ce qui nous donne ii).

La partie iii) est une conséquence de (4.56).

Considérons la fonction suivante à λ fixée :

$$\begin{aligned} \Theta :]-\infty, aS[&\rightarrow [\lambda, 1[\\ \beta' &\mapsto \max \left\{ F(\beta'), \lambda \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

4.2. EXISTENCE ET UNICITÉ DU NOUVEAU MODÈLE

Considérons $z_{a,\lambda}$, la valeur de β' lorsque $F(\beta') = \lambda$, c'est-à-dire :

$$z_{a,\lambda} = \begin{cases} S^{\frac{a\lambda - \frac{1}{2}}{\lambda - 1}} & \text{si } \lambda \neq 1 \\ \frac{S}{2} & \text{si } \lambda = 1 \text{ et } a = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.58)$$

Dans la suite, nous voulons caractériser la condition $z_{a,\lambda} \leq \beta' \leq aS$, dans le cas $a > \frac{1}{2}$.

Nous pouvons déduire facilement, de (4.39) avec $\Theta(\beta^+, t) = \lambda$ et avec l'hypothèse 4.37 sur λ , que :

$$z_{a,\lambda} \leq \beta' \leq aS \iff h(\beta) \leq G(\alpha, \beta) \leq 2ah(\beta) \quad (4.59)$$

Nous posons :

$$A_2 = \{ (\alpha, \beta) \in A_1 \mid 0 < \alpha < \gamma < \beta < 1 \text{ et } G(\alpha, \beta) \leq 2ah(\beta) \} \quad (4.60)$$

Nous rajoutons une hypothèse simplificatrice sur h :

$$G(0, 1) \leq h(1) \quad (4.61)$$

Cette hypothèse est notamment vérifiée dans le cas $h(0) \leq h(1)$. Alors dans ce cas, d'après le lemme 4.2.2-1), nous avons :

$$A_1 = \{ (\alpha, \beta) \mid 0 < \alpha < \gamma, \gamma < \beta \leq \beta^*(\alpha) \}$$

Lemme 4.2.4 (Définition de A_1 et A_2 en fonction de $\partial_x p(\gamma)$).

Supposons que $a \in]\frac{1}{2}, 1]$, nous avons alors :

a) Si $G(0, \gamma) \leq 2ah(\gamma)$ alors $A_1 = A_2$

b) Si $G(0, \gamma) > 2ah(\gamma)$ alors il existe $\underline{\alpha} \in]0, \gamma[$ tel que :

$$\forall \alpha \in]0, \underline{\alpha}[, \exists \beta_* = \beta_*(\alpha) \in]\gamma, \beta^*(\alpha)[\text{ solution de l'équation } G(\alpha, \beta_*) = 2h(\beta_*)$$

Dans ce cas, on a :

$$A_2 = \{ (\alpha, \beta) \mid 0 < \alpha \leq \underline{\alpha}, \beta_*(\alpha) \leq \beta \leq \beta^*(\alpha) \} \cup \{ (\alpha, \beta) \mid \underline{\alpha} < \alpha < \gamma, \gamma < \beta \leq \beta^*(\alpha) \}$$

Démonstration. Soit $R(\alpha, \beta) := G(\alpha, \beta) - 2ah(\beta)$ une fonction définie sur A_1 .

D'après (4.50), R est strictement croissante en α à β fixé et aussi strictement décroissante en β à α fixé.

Nous avons :

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta^*(\alpha)) &= G(\alpha, \beta^*(\alpha)) - h(\beta^*(\alpha)) - (2a - 1)h(\beta^*(\alpha)) \\ &= -(2a - 1)h(\beta^*(\alpha)) \end{aligned} \quad \forall \alpha \in [0, \gamma]$$

D'autre part nous déduisons de (4.51) :

$$R(\gamma, \gamma) = (1 - 2a)h(\gamma) < 0$$

Or $G(0, \gamma) \leq 2ah(\gamma)$ implique que $R(0, \gamma) < 0$, Donc la fonction R est strictement négative sur A_1 , ce qui implique que $A_1 = A_2$. \square a)

Dans le cas b), comme $R(0, \gamma) > 0$ il existe $\underline{\alpha} \in]0, \gamma[$ tel que :

$$R(\alpha, \gamma) = \begin{cases} > 0 & \text{si } \alpha < \underline{\alpha} \\ = 0 & \text{si } \alpha = \underline{\alpha} \\ < 0 & \text{si } \alpha > \underline{\alpha} \end{cases}$$

Nous avons alors b). □ b)

Lemme 4.2.5. *Si $G(0, \gamma) \geq 2ah(\gamma)$ alors la fonction β_* du lemme 4.2.4 vérifie :*

- i) $\beta_* \in \mathcal{C}^1$
- ii) $\beta'_* < 0$

Ce résultat est une conséquence immédiate de la définition de la fonction R du lemme (4.2.4), R étant strictement décroissante en α et en β sur A_1 .

Remarque 4. Les conséquences de ces deux derniers lemmes sont :

- i) Si $h(0) \leq 2ah(\gamma)$ alors $G(0, \gamma) < 2ah(\gamma)$ (car $G(0, \gamma) < h(0)$)
- ii) Si $G(0, \gamma) > 2ah(\gamma)$, alors il existe alors un $\beta_*(\alpha)$

4.2.2 Étude du cas stationnaire

Une solution stationnaire du problème (4.38-4.39) est un couple $(\alpha_e, \beta_e) \in [0, \gamma] \times [\gamma, 1]$ vérifiant :

$$G(\alpha_e, \beta_e) = 2a \Theta_{In} h(0) \quad (4.62)$$

$$G(\alpha_e, \beta_e) = h(\beta_e) \quad (4.63)$$

$$\alpha_0 = \alpha(0) \quad (4.64)$$

$$\beta_0 = \beta(0) \quad (4.65)$$

Définition 4.2.6 (Débit d'entrée constant). Le débit d'entrée constant, se traduit pour une vitesse constante aS de déplacement des parois entre elles, se traduit par :

$$\Theta_0(x)h(x) = \Theta_{In} h(0) = \eta \quad \eta \in]0, \min_{x \in [0, \alpha(0)]} h(x)[\quad (4.66)$$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.2.7. *Si $h(\gamma) < 2a\eta < h(\beta^*(0))$ alors il existe une unique solution (α_e, β_e) de (4.62, 4.63)*

Démonstration. Comme h est strictement croissante sur $] \gamma, 1[$ (d'après l'hypothèse 4.1.2) et

$$2a\eta \in]h(\gamma), h(\beta^*(0))[\subset]h(\gamma), h(1)[$$

Nous avons l'existence et l'unicité d'un $\beta_e \in] \gamma, 1[$ tel que $h(\beta_e) = 2a\eta$.

Il suffit alors de montrer l'existence et l'unicité d'un $\alpha_e \in]0, \gamma[$ tel que (4.63) soit vérifiée.

Ceci revient à trouver α_e sous la forme :

$$\alpha_e = (\beta^*)^{-1}(\beta_e)$$

avec $(\beta^*)^{-1}$ la réciproque de la fonction β^* définie dans le lemme 4.2.2.

De l'hypothèse (4.61), β^* est définie sur l'intervalle $[0, \gamma[$ à valeur dans $] \gamma, 1[$.

4.2. EXISTENCE ET UNICITÉ DU NOUVEAU MODÈLE

D'autre part, β^* est strictement décroissante et $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow \gamma \\ \alpha < \gamma}} \beta^*(\alpha) = \gamma$, d'après le lemme 4.2.3.

Donc $(\beta^*)^{-1}$ existe et est défini sur l'intervalle $]\gamma, \beta^*(0)[$.

Nous avons donc l'existence et l'unicité avec $\beta_e \in]\gamma, \beta^*(0)[$. □

4.2.3 Étude du cas transitoire

Dans cette section, nous rajoutons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.2.8 (Condition sur $\partial_x p(\gamma)$). *Nous supposons :*

$$G(0, \gamma) < 2a h(\gamma) \quad (4.67)$$

D'après le lemme 4.2.4, nous avons :

$$A_2 = A_1 = \{ (\alpha, \beta) \mid 0 \leq \alpha \leq \gamma, \gamma \leq \beta \leq \beta^*(\alpha) \} \quad (4.68)$$

Remarque 5. Nous remarquons :

- i) De (4.2.8), nous déduisons que $a > \frac{1}{2}$ (car $G(0, \gamma) < h(\gamma)$), donc les résultats de cette partie ne sont pas valables pour le modèle d'Elrod-Adams. (cas où $a = \frac{1}{2}$)
- ii) les deux hypothèses (4.61) et (4.2.8) dépendent uniquement de la fonction h .

Rappelons l'hypothèse faite sur η (la hauteur de film en entrée) :

$$0 < \eta < h(0) \quad (4.69)$$

Quelques résultats préliminaires

Nous introduisons dans la suite le nombre $\tilde{\alpha} \in]0, \gamma]$ défini par :

$$\begin{cases} \tilde{\alpha} = \gamma & \text{si } h(\gamma) \geq \eta \\ \tilde{\alpha} = (h|_{[0, \gamma]})^{-1}(\eta) & \text{si } h(\gamma) < \eta < h(0) \end{cases} \quad (4.70)$$

Nous définissons l'ensemble :

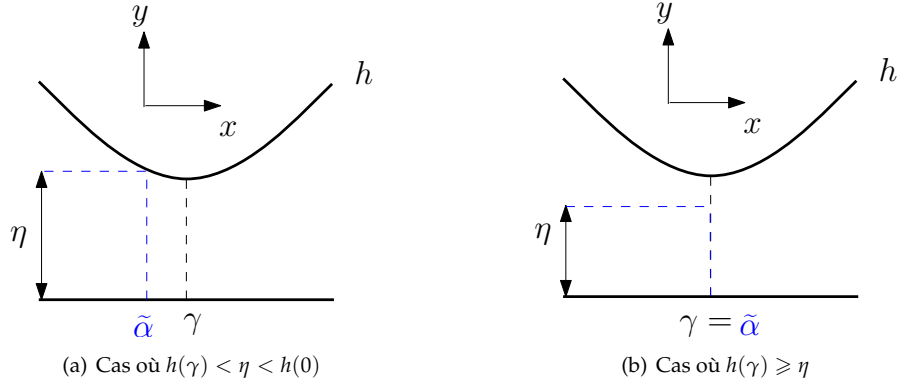
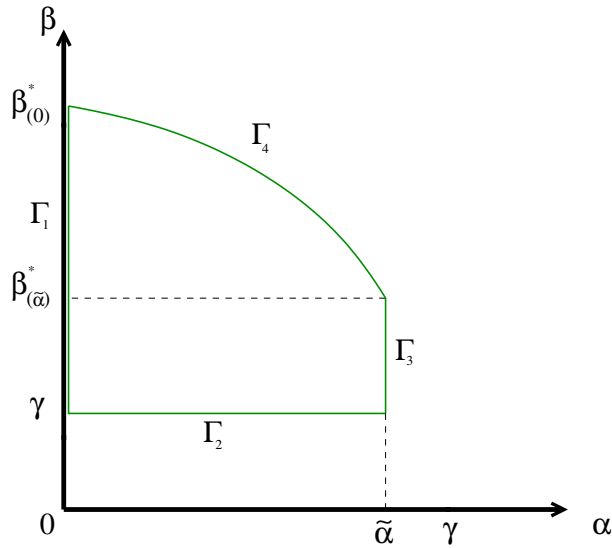
$$A = \{ (\alpha, \beta) \in A_2 \mid \alpha < \tilde{\alpha} \} \quad (4.71)$$

Si $(\alpha, \beta) \in A$ alors $h(\alpha) > \eta$, car h est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$ d'après l'hypothèse 4.1.2.

Dans la suite, nous supposons que la donnée initiale (α_0, β_0) appartient à A et nous montrerons que $(\alpha(t), \beta(t)) \in A$.

Posons :

$$\partial A = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \text{ avec } \begin{cases} \Gamma_1 = \{0\} \times [\gamma, \beta^*(0)] \\ \Gamma_2 = [0, \tilde{\alpha}] \times \{\gamma\} \\ \Gamma_3 = \{\tilde{\alpha}\} \times [\gamma, \beta^*(\tilde{\alpha})] \\ \Gamma_4 = \{ (\alpha, \beta^*(\alpha)) \mid \alpha \in]0, \tilde{\alpha}[\} \end{cases} \quad (4.72)$$


 FIGURE 4.5 – Représentation de $\tilde{\alpha}$

 FIGURE 4.6 – Représentation du domaine A et de ces frontières

Remarque 6. Si $\tilde{\alpha} = \gamma$ alors Γ_3 se réduit à un seul point $\{(\gamma, \gamma)\}$.

Définition 4.2.9 (α -isocline). Nous définissons par Z la courbe α -isocline du problème (4.38-4.39) :

$$Z = \{ (\alpha, \beta) \in A \mid G(\alpha, \beta) = 2a\eta \} \quad (4.73)$$

Le résultat suivant nous donne l'existence ou non d'une isocline en fonction de la valeur de η .

Lemme 4.2.10. (Existence d'une isocline en fonction de η) Nous étudions les différents cas :

a) Si $G(0, \gamma) \leq 2a\eta < 2ah(0)$ alors $Z = \emptyset$ (il n'y a pas d'isocline dans A)

Dans ce cas, on a :

$$G(\alpha, \beta) - 2a\eta < 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in A$$

b) Si $2a\eta \leq h(\gamma)$ alors $Z = \emptyset$ (il n'y a pas d'isocline dans A)

Dans ce cas, on a :

$$G(\alpha, \beta) - 2a\eta > 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in A$$

4.2. EXISTENCE ET UNICITÉ DU NOUVEAU MODÈLE

c) Si $h(\gamma) < 2a\eta < G(0, \gamma)$.

Nous définissons $\alpha_e^0 \in [0, \tilde{\alpha}[$ de la manière suivante :

$$\alpha_e^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } G(0, \gamma) > 2a\eta \geq h(\beta^*(0)) \\ \alpha_e & \text{si } h(\gamma) < 2a\eta < h(\beta^*(0)) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Cas sans solution stationnaire} \\ \text{Cas avec solution stationnaire} \end{array}$$

où α_e est défini dans la proposition 4.2.7.

Alors il existe $\alpha_I^0 \in]\alpha_e^0, \tilde{\alpha}[$ et il existe une fonction :

$$\beta_I : [\alpha_e^0, \alpha_I^0] \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1, \text{ strictement positive et décroissante avec } \beta_I(\alpha_I^0) = \gamma$$

telle que l'isocline Z existe et est définie par :

$$Z = \{ (\alpha, \beta_I(\alpha)) \mid \alpha \in [\alpha_e^0, \alpha_I^0] \}$$

En plus dans le cas où $h(\beta^*(0)) > 2a\eta > h(\gamma)$, nous avons $\beta_I(\alpha_e) = \beta_e$.

D'autre part, l'isocline Z sépare A en deux parties :

- $G(\alpha, \beta) - 2a\eta > 0 \iff (\alpha, \beta) \in A_g$, où A_g : la partie "de gauche" de Z
- $G(\alpha, \beta) - 2a\eta = 0 \iff (\alpha, \beta) \in Z$
- $G(\alpha, \beta) - 2a\eta < 0 \iff (\alpha, \beta) \in A_d$, où A_d : la partie "de droite" de Z

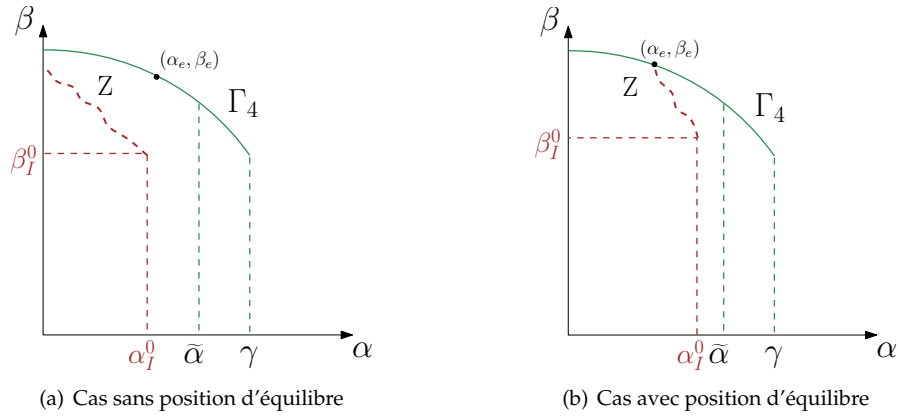


FIGURE 4.7 – Illustration des différents cas où l'isocline existe

Démonstration. Rappelons que G est strictement décroissante en α et en β sur l'ensemble A .

Cas a) Si $2a\eta \geq G(0, \gamma)$ et comme la fonction $G_1 : \alpha \mapsto G(\alpha, \gamma)$ est strictement décroissante, alors nous avons :

$$G(\alpha, \gamma) < 2a\eta \quad \text{si } \alpha \in]0, \tilde{\alpha}[$$

Ceci nous donne le résultat. □ a)

Cas b) Si $2a\eta \leq h(\gamma)$ alors comme $2a \in]1, 2]$, nous avons $h(\gamma) > \eta$, ce qui entraîne, par définition de $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} = \gamma$. D'autre part, nous avons :

$$G(\alpha, \beta^*(\alpha)) - 2a\eta = h(\beta^*(\alpha)) - 2a\eta > h(\gamma) - 2a\eta \geq 0 \quad \text{si } \alpha < \gamma$$

Ceci nous donne le résultat. □ b)

Cas c) Supposons :

$$h(\gamma) < 2a\eta < G(0, \gamma)$$

Alors pour $\tilde{\alpha} = \gamma$ ou pour $\tilde{\alpha} < \gamma$, nous avons :

$$G(\tilde{\alpha}, \gamma) = \frac{\int_{\tilde{\alpha}}^{\gamma} \frac{h(x)}{h^3(x)} dx}{\int_{\tilde{\alpha}}^{\gamma} \frac{1}{h^3(x)} dx} \leq h(\tilde{\alpha}) < 2a\eta \quad (4.74)$$

Nous avons deux cas, selon si $h(\beta^*)$ est inférieure ou supérieure à $2a\eta$.

c.1) Cas sans solution stationnaire :

Supposons $G(0, \gamma) > 2a\eta \geq h(\beta^*(0))$.

Nous déduisons de (4.74) qu'il existe $\alpha_I^0 \in]0, \tilde{\alpha}[$ tel que :

$$\begin{cases} G(\alpha, \gamma) > 2a\eta & \text{si } \alpha < \alpha_I^0 \\ G(\alpha, \gamma) < 2a\eta & \text{si } \alpha > \alpha_I^0 \\ G(\alpha, \gamma) = 2a\eta & \text{si } \alpha = \alpha_I^0 \end{cases}$$

D'autre part, nous avons :

$$G(\alpha, \beta^*(\alpha)) - 2a\eta = h(\beta^*(\alpha)) - 2a\eta < h(\beta^*(0)) - 2a\eta \leq 0$$

car la fonction $\beta^*(\alpha)$ est décroissante sur $[0, \gamma[$, et h est croissante sur $[\gamma, 1]$.

Donc $\forall \alpha \in [0, \alpha_I^0], \exists \beta_I(\alpha)$ tel que :

$$\begin{aligned} G(\alpha, \beta_I(\alpha)) - 2a\eta &= 0 \\ G(\alpha, \beta) - 2a\eta > 0 &\iff \beta < \beta_I(\alpha) \end{aligned} \quad (4.75)$$

□ c.1)

c.2) Cas avec une solution stationnaire :

Supposons $h(\gamma) < 2a\eta < h(\beta^*(0))$ et donc $\alpha_e^0 = \alpha_e$

Dans ce cas, nous avons :

$$\text{Si } \alpha < \alpha_e \quad G(\alpha, \beta^*(\alpha)) = h(\beta^*(\alpha)) > h(\beta_e) = 2a\eta \quad (4.76)$$

ce qui donne $G(\alpha, \beta) > 2a\eta$ si $(\alpha, \beta) \in A$ et $\alpha < \alpha_e$.

D'autre part, $G(\alpha_e, \beta_e) = 2a\eta$ et comme G est strictement décroissante en β , nous avons :

$$G(\alpha_e, \gamma) > 2a\eta$$

Nous déduisons alors de (4.74) qu'il existe $\alpha_I^0 \in]\alpha_e, \hat{\alpha}[$ tel que :

$$\begin{cases} G(\alpha, \gamma) > 2a\eta & \text{si } \alpha < \alpha_I^0 \\ G(\alpha, \gamma) < 2a\eta & \text{si } \alpha > \alpha_I^0 \\ G(\alpha, \gamma) = 2a\eta & \text{si } \alpha = \alpha_I^0 \end{cases}$$

D'autre part, de la même façon que pour (4.76), nous obtenons :

$$\text{Si } \alpha > \alpha_e \quad G(\alpha, \beta^*(\alpha)) < 2a\eta$$

Ceci nous donne $\forall \alpha \in [\alpha_e, \alpha_I]$, l'existence d'un $\beta_I(\alpha)$ avec les propriétés demandées.

Remarquons que dans les cas (c.1)) (c.2)), $\beta_I(\alpha)$ satisfait l'égalité de (4.75).

Du théorème des fonctions implicites appliqué à la fonction G sur $[\alpha_e^0, \alpha_I^0]$, nous déduisons que l'isocline Z existe, car :

$$\frac{\partial G}{\partial \beta}(\alpha, \beta_I(\alpha)) < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha}(\alpha, \beta_I(\alpha)) < 0 \quad \forall \alpha \in]\alpha_e^0, \alpha_I^0[$$

4.2. EXISTENCE ET UNICITÉ DU NOUVEAU MODÈLE

□ c)

Proposition 4.2.11. *Supposons que sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ avec $0 \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$, la solution $(\alpha(t), \beta(t))$ du système (4.38-4.39) est de classe \mathcal{C}^1 et se trouve sur la courbe Γ_4 , c'est-à-dire :*

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \frac{S}{2} \left(\frac{G(\alpha(t), \beta(t)) - 2a\eta}{h(\alpha(t)) - \eta} \right) \\ G(\alpha(t), \beta(t)) = h(\beta(t)) \\ \beta'(t) \leq z_{a,\lambda} \end{cases} \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (4.77)$$

Nous avons alors :

$$\begin{cases} \beta'(t) = \varphi(\beta(t)) \\ \varphi(\beta(t)) \leq z_{a,\lambda} \end{cases} \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (4.78)$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi :]\beta^*(\tilde{\alpha}), \beta^*(0)[&\rightarrow \mathbb{R} \\ \beta &\mapsto \frac{S}{2} \frac{1}{h'(\beta)} \left(\frac{h(\beta) - h(\alpha)}{h^3(\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{h^3(x)}} \right) \left(\frac{h(\beta) - 2a\eta}{h(\alpha) - \eta} \right) \end{aligned}$$

où $\alpha = (\beta^*)^{-1}(\beta)$.

Réciproquement :

Si $\beta \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2])$, $\beta([t_1, t_2]) \subset]\beta^*(\tilde{\alpha}), \beta^*(0)[$ et satisfait (4.78), alors :

$$(\alpha(t), \beta(t)) \text{ satisfait (4.77)} \quad \text{avec } \alpha(t) = (\beta^*)^{-1}(\beta(t))$$

Démonstration. Supposons que $(\alpha(t), \beta(t))$ satisfait :

$$G(\alpha(t), \beta(t)) = h(\beta(t))$$

En dérivant en t , nous obtenons :

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha}(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) + \left(\frac{\partial G}{\partial \beta}(\alpha(t), \beta(t)) - h'(\beta(t)) \right) \beta'(t) = 0$$

En utilisant (4.38) et (4.50), nous obtenons :

$$\beta'(t) = \left(\frac{h(\alpha) - G(\alpha, \beta)}{h^3(\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{h^3(x)}} \right) \cdot \left(\frac{S}{2} \cdot \frac{G(\alpha, \beta) - 2a\eta}{h(\alpha) - \eta} \right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{h(\beta) - G(\alpha, \beta)}{h^3(\beta) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{h^3(x)}} - h'(\beta)} \right)$$

Comme $G(\alpha, \beta) = h(\beta)$, d'après (4.77), et d'après l'hypothèse 4.1.2 sur h , h' ne s'annule pas, nous avons :

$$\beta'(t) = \left(\frac{h(\alpha) - h(\beta)}{h^3(\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{h^3(x)}} \right) \cdot \left(\frac{S}{2} \cdot \frac{h(\beta) - 2a\eta}{h(\alpha) - \eta} \right) \cdot \left(\frac{1}{-h'(\beta)} \right)$$

D'où (4.78).

Réciproquement, supposons que $\beta(t)$ soit solution de (4.78) et $\alpha(t) = (\beta^*)^{-1}(\beta(t))$.

Il suffit alors de montrer :

$$\alpha'(t) = \frac{S}{2} \cdot \frac{G(\alpha, \beta) - 2a\eta}{h(\alpha) - \eta}$$

En dérivant $\alpha = (\beta^*)^{-1}(\beta)$, nous avons :

$$\alpha'(t) = \frac{1}{(\beta^*)'(\alpha(t))} \beta'(t)$$

D'autre part en dérivant par rapport à α l'égalité $G(\alpha, \beta^*(\alpha)) = h(\beta^*)$, nous obtenons :

$$(\beta^*)'(\alpha) = \frac{\frac{\partial G}{\partial \alpha}(\alpha, \beta^*)}{h'(\beta^*)} \quad \left(\text{car } \frac{\partial G}{\partial \beta}(\alpha, \beta^*) = 0 \text{ (d'après (4.50) et (4.53))} \right)$$

En utilisant (4.78) et (4.50), nous avons le résultat.

□

Considérons l'application correspondant aux équation (4.38)-(4.39), dans le cas $\lambda > F(\beta'(t))$, avec un débit constant $\eta = \Theta(0, t)h(0)$:

$$\begin{aligned} \phi : \quad \bar{A}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\phi_1(\alpha, \beta), \phi_2(\alpha, \beta)) &\mapsto \left(\frac{S}{2} \frac{G(\alpha, \beta) - 2a\eta}{h(\alpha) - \eta}, \frac{S}{2} \frac{1}{(1 - \lambda)} \left(\frac{G(\alpha, \beta)}{h(\beta)} - 2a\lambda \right) \right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

où \bar{A} est l'adhérence de A , avec A définie en (4.71).

Pour tout élément $(\alpha, \beta) \in \partial A$, nous notons $\nu(\alpha, \beta)$ le vecteur normal extérieur à ∂A .

Comme $G(\alpha, \beta) > h(\beta)$ sur \mathring{A} , l'intérieur de A , et $\lambda \leq \frac{1}{2a}$, nous avons :

$$\phi_2(\alpha, \beta) > 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathring{A}$$

Ceci nous donne :

$$\phi \cdot \nu < 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (4.80)$$

D'autre part, nous déduisons du lemme 4.2.10 que $\phi_1(\alpha, \beta) < 0$ si (α, β) est proche de Γ_3 . D'où :

$$\phi \cdot \nu < 0 \quad \text{si } (\alpha, \beta) \text{ est proche de } \Gamma_3 \quad (4.81)$$

Dans le cas $(\alpha, \beta) \in \Gamma_4$, nous avons $\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + ((\beta^*)')^2}} \begin{pmatrix} -(\beta^*)' \\ 1 \end{pmatrix}$ et $G(\alpha, \beta^*) = h(\beta^*)$

Ce qui nous donne immédiatement :

$$\phi \cdot \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + ((\beta^*)')^2}} \left[-\frac{S}{2} \frac{h(\beta) - 2a\eta}{h(\alpha) - \eta} (\beta^*)' + z_{a,\lambda} \right] \quad \text{si } (\alpha, \beta) \in \Gamma_4 \text{ et } a > \frac{1}{2} \quad (4.82)$$

Remarquons que si $\lambda = \frac{1}{2a}$, nous avons $z_{a,\lambda} = 0$.

Comme $(\beta^*)' < 0$ (lemme 4.2.3) et $h(\alpha) - \eta > 0$ (d'après (4.71)), cela nous donne la proposition suivante :

4.2. EXISTENCE ET UNICITÉ DU NOUVEAU MODÈLE

Proposition 4.2.12. Supposons $\lambda = \frac{1}{2a}$. Alors :

- a) si $2a\eta \geq h(\beta^*(0))$, alors $\phi \cdot v < 0$ sur Γ_4
- b) si $2a\eta \leq h(\gamma)$, alors $\phi \cdot v > 0$ sur Γ_4
- c) si $h(\gamma) < 2a\eta < h(\beta^*(0))$, alors on a l'existence d'une solution stationnaire (α_e, β_e) , et on a :
 - $\phi \cdot v < 0$ si $\beta < \beta_e$
 - $\phi \cdot v > 0$ si $\beta > \beta_e$

Résultats d'existence globale

Nous supposons de plus que :

Hypothèse 4.2.13 (Condition sur la valeur minimale de fluide en sortie).

$$\lambda = \frac{1}{2a} \quad (4.83)$$

ce qui donne $z_{a,\lambda} = 0$.

Théorème 4.2.14. Soit les hypothèses suivantes :

-4.1.2 la fonction h est strictement décroissante sur $]0, \gamma[$ et croissante sur $[\gamma, 1[$, de plus

$$\min_{x \in [0,1]} h(x) = \gamma > 0$$

-(4.6) $a \in [\frac{1}{2}, 1]$ un paramètre de vitesse du fluide

-(4.83) λ est ici pris égale à $\frac{1}{2a}$

-(4.71)-(4.53) la condition initiale $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathring{A} = \{(\alpha, \beta) | 0 \leq \alpha \leq \min(\gamma, \tilde{\alpha}) \text{ et } \gamma \leq \beta \leq \beta^*(\alpha)\}$

où $\beta^*(\alpha)$ est la solution de $G(\alpha, \beta^*(\alpha)) = h(\beta^*)$, et $\tilde{\alpha} = \begin{cases} \tilde{\alpha} = \gamma & \text{si } h(\gamma) \geq \eta \\ h(\tilde{\alpha}) = \eta & \text{si } h(\gamma) < \eta < h(0) \end{cases}$, $\tilde{\alpha} \in [0, \gamma]$

-(4.66) hauteur de film en entrée : $0 < \eta < h(0)$ où $\eta = \theta(0, t)h(0)$

-(4.61) condition sur le maximum : $G(0, 1) < h(1)$

-4.2.8 condition reliant h et a : $G(0, \gamma) < 2ah(\gamma)$

Soit $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathring{A}$. Nous avons :

Cas 1. si $2ah(0) > 2a\eta \geq h(\beta^*(0))$ alors il existe $T_1 > 0$ tel que la solution de (4.38-4.39) existe et est unique pour $t \in [0, T_1]$ et $\alpha(T_1) = 0$

Cas 2. si $h(\gamma) \leq 2a\eta < h(\beta^*(0))$ alors la solution de (4.38-4.39) existe et est unique pour $t \in [0, +\infty[$, et $(\alpha(t), \beta(t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (\alpha_e, \beta_e)$

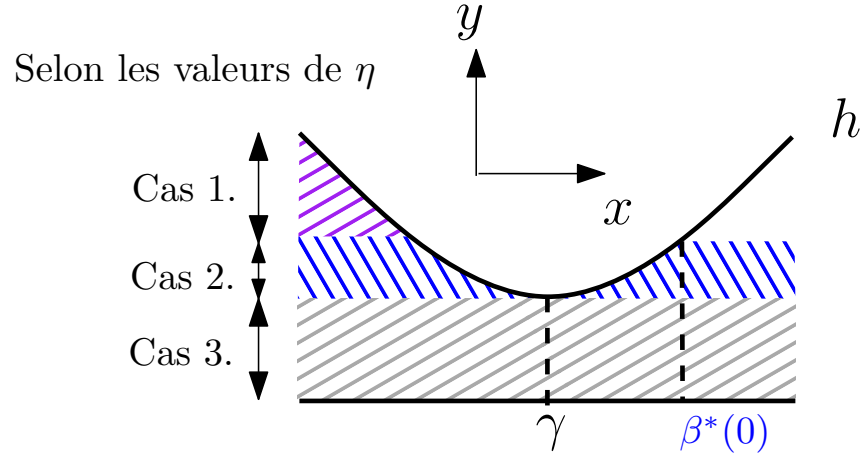
Cas 3. si $h(\gamma) > 2a\eta > 0$ alors il existe $T_2 > 0$ tel que la solution de (4.38-4.39) existe et est unique pour $t \in [0, T_2]$ et $(\alpha(T_2), \beta(T_2)) = (\gamma, \gamma)$

Démonstration. Il existe un temps $T_0 > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T_0[$, la solution $(\alpha(t), \beta(t))$ du problème (4.38-4.39) est solution du système :

$$\begin{cases} \alpha' = \phi_1(\alpha, \beta) \\ \beta' = \phi_2(\alpha, \beta) \\ \alpha(0) = \alpha_0 \\ \beta(0) = \beta_0 \end{cases} \quad (4.84)$$

Nous notons T_0 le plus grand temps pour lequel la solution de (4.84) existe et appartient à \mathring{A} .

De (4.59) et des descriptions (4.60) et de (4.71) de A , nous avons $\beta'(t) > 0$.


 FIGURE 4.8 – Illustration des différents cas selon la condition au bord du débit η

- Cas 1.** a) Si $2ah(0) > 2a\eta \geq G(0, \gamma)$ alors du lemme 4.2.10.a) nous avons $\alpha'(t) < 0$.
Par suite $(\alpha(t), \beta(t))$ n'intersecte pas Γ_4 , grâce au fait que $\phi \cdot \nu < 0$ sur Γ_4 (d'après la proposition 4.2.12).
Nous avons alors le résultat avec $T_1 = T_0$.
- b) Si $h(\beta^*(0)) \leq 2a\eta < G(0, \gamma)$ alors il existe une isocline Z donnée par le lemme 4.2.10 et nous avons :
- $$\begin{aligned} \alpha' &> 0 && \text{si } (\alpha, \beta) \in A_g \\ \alpha' &< 0 && \text{si } (\alpha, \beta) \in A_d \end{aligned}$$
- Alors nous concluons avec $T_1 = T_0$ car $(\alpha(t), \beta(t))$ peut intersecter Z en venant de A_g vers A_d mais pas dans l'autre sens.
En plus $(\alpha(t), \beta(t))$ n'intersecte pas Γ_4 car $\phi \cdot \nu < 0$ sur Γ_4 .
- Cas 2.** Si $h(\beta^*(0)) > 2a\eta \geq h(\gamma)$, alors il existe une solution stationnaire (α_e, β_e) et ainsi qu'une α -isocline Z donnée par le lemme 4.2.10.
Nous avons deux cas :
- a) si $(\alpha_0, \beta_0) \in A_d$.
La courbe $(\alpha(t), \beta(t))$ ne peut intersecter ni Z , ni la courbe $\{(\alpha, \beta) \in \Gamma_4 \mid \alpha > \alpha_e\}$, ni la droite $\{\beta = \gamma\}$. Ceci entraîne que $(\alpha(t), \beta(t))$ existe pour tout $t \in [0, +\infty[$ (d'où $T_0 = +\infty$),
$$(\alpha(t), \beta(t)) \in \mathring{A}_d, \text{ et } (\alpha(t), \beta(t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (\alpha_e, \beta_e)$$
-
- b) si $(\alpha_0, \beta_0) \in A_g$.
Alors pour la trajectoire $(\alpha(t), \beta(t))$, il n'y a que 3 possibilités :
- i) $(\alpha(t), \beta(t)) \in \mathring{A}_g, \forall t \geq 0$ et $(\alpha(t), \beta(t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (\alpha_e, \beta_e)$
 - ii) Il existe $t_1 > 0$ tel que $(\alpha(t_1), \beta(t_1)) \in Z$. Alors la trajectoire à partir de ce temps t_1 est comme dans le cas a)).
 - iii) Pour $T_0 < +\infty$, $(\alpha(T_0), \beta(T_0)) \in \Gamma_4$ et $\alpha(T_0) < \alpha_e$.
Ceci se produit si $\beta(t)$ dépasse β_e à un moment donné, ou si $\beta_0 > \beta_e$.
Dans ce cas, $\beta(t)$ satisfait l'équation (4.78) au moins sur un intervalle $]T_0, T_1[$
Donc $(\alpha(t), \beta(t))$ évolue sur la partie $\{\beta \geq \beta_e\}$ de la courbe Γ_4 .
Nous observons :

4.2. EXISTENCE ET UNICITÉ DU NOUVEAU MODÈLE

Si $h(\beta_e) = 2a\eta$ et $\beta(t) > \beta_e$, alors $\varphi(\beta) < 0$ et $\varphi(\beta_e) = 0$

avec α définit dans la proposition (4.2.11).

Ceci démontre que $T_1 = +\infty$, $\beta'(t) < 0$ si $t > T_0$ et $\beta(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \beta_e$.

Donc aussi $\alpha(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \alpha_e$.

Ceci entraîne que $\forall t \ (\alpha(t), \beta(t)) \in \{ \beta \geq \beta_e \}$ de la courbe Γ_4 et donc que :

$$(\alpha(t), \beta(t)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (\alpha_e, \beta_e)$$

□

Cas 3. Si $h(\gamma) > 2a\eta > 0$

Alors nous avons $\alpha'(t) > 0$, et il n'y a pas d'isocline Z .

Dans ce cas $(\alpha(T_0), \beta(T_0)) \in \Gamma_4$ et la suite de la trajectoire de $(\alpha(t), \beta(t))$ est comme dans le cas iii), sauf que nous aurons :

$$\beta'(t) < 0 \quad \text{si } t > T_0$$

De plus il n'y a plus d'état d'équilibre, la trajectoire de $(\alpha(t), \beta(t))$ arrivera en (γ, γ) en un temps **fini**. □

CHAPITRE 5

RÉSULTATS NUMÉRIQUES POUR LE NOUVEAU MODÈLE DE CAVITATION

Dans cette partie, nous présentons les résultats numériques obtenus pour le nouveau modèle de cavitation (4.38)-(4.39) décrit dans le chapitre précédent.

Nous résolvons les équations (4.38)-(4.39) numériquement par une méthode de Newton. Puis une fois les nouvelles positions des frontières connues, nous déterminons $\theta(x, t)$ en résolvant l'équation hyperbolique de transport (4.12) dans la zone cavité Ω_0 à l'aide de la méthode des caractéristiques. Enfin la pression est déterminée en calculant l'intégrale (4.23), résultat de l'équation de Reynolds avec des conditions aux limites nulles.

5.1 Discrétisation du système

Dans ce problème 1D, le maillage de l'espace et le découpage du temps sont réguliers, avec Δx le pas d'espace et Δt le pas de temps. Pour la discrétisation des équations, nous avons utilisé un schéma de Newton explicite. Les équations (4.38)-(4.39) au temps $t^n = n.\Delta t$ s'expriment alors :

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + \Delta t * \frac{[\frac{S}{2}G(\alpha^{n-1}, \beta^{n-1}) - aS.\Theta(\alpha^{n-1}, t^{n-1})h(\alpha^{n-1})]}{h(\alpha^{n-1})(1 - \Theta(\alpha^{n-1}, t^{n-1}))} \quad (5.1)$$

$$\beta^n = \beta^{n-1} + \Delta t * \frac{[\frac{S}{2}G(\alpha^{n-1}, \beta^{n-1}) - aS.\Theta(\beta^{n-1}, t^{n-1})h(\beta^{n-1})]}{h(\beta^{n-1})(1 - \Theta(\beta^{n-1}, t^{n-1}))} \quad (5.2)$$

La pression au point $x_i = i.\Delta x$ du système s'exprime par :

$$P_i^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \in \Omega_0 \\ 6\mu S \left(\int_{\alpha^n}^i \frac{dx}{h^2(x)} - G(\alpha^n, \beta^n) \int_{\alpha^n}^i \frac{dx}{h^3(x)} \right) & \text{si } x_i \in \Omega_+ \end{cases} \quad (5.3)$$

avec :

$$G(\alpha^n, \beta^n) = \frac{\int_{\alpha^n}^{\beta^n} \frac{1}{h^2(x)} dx}{\int_{\alpha^n}^{\beta^n} \frac{1}{h^3(x)} dx} \quad (5.4)$$

Et Θ_i^n s'exprime :

5.2. CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX LIMITES

sur $[\beta^n, 1]$ par :

$$\Theta_{(x_i, t^n)} = \begin{cases} \max\left(\frac{\Theta_{(\beta^{n-1}, \Delta t - \frac{x_i - \beta^{n-1}}{aS})} \cdot h(\beta^{n-1})}{h(x_i)}, \lambda\right) & \text{si } \beta' < aS \text{ Rupture} \\ \frac{\Theta_{(x_i - aS\Delta t - \beta^{n-1}, 0)} \cdot h(x_i - aS\Delta t - \beta^{n-1})}{h(x_i)} & \text{si } \beta' \geq aS \text{ Reformation} \end{cases} \quad (5.5)$$

sur $[0, \alpha^n]$ par :

$$\Theta_{(x_i, t^n)} = \begin{cases} \frac{\Theta_{(0, \Delta t - \frac{x_i - \alpha^{n-1}}{aS})} \cdot h(0)}{h(x_i)} & \text{si } \alpha' \leq aS \text{ Reformation} \\ \frac{\Theta_{(x_i - aS\Delta t - \alpha^{n-1}, 0)} \cdot h(x_i - aS\Delta t - \alpha^{n-1})}{h(x_i)} & \text{si } \alpha' > aS \text{ Rupture} \end{cases} \quad (5.6)$$

Il reste à déterminer maintenant les conditions initiales à imposer ainsi que les conditions aux limites afin d'être dans le cas où $(\alpha^n, \beta^n) \rightarrow (\alpha_e, \beta_e)$ (théorème 4.2.14).

5.2 Conditions initiales et conditions aux limites

Soit h une géométrie imposée et fixe au cours du temps :

$$h(x) = 4 \cdot (x - \frac{1}{2})^2 + 1 \quad (5.7)$$

La position des frontières α_0 et β_0 au temps initial est imposée par la condition de positivité de la pression. $(\alpha(0), \beta(0)) \in A_1$ (lemme 4.1.3). Pour la géométrie prise, l'espace A_1 est représenté en bleu sur la figure (5.1).

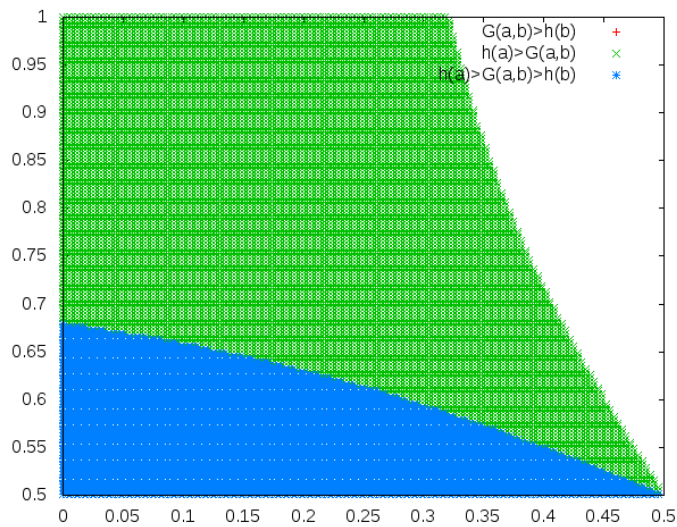


FIGURE 5.1 – Représentation de la zone de pression positive A_1 pour la géométrie h donnée

5.3 Résolution et résultats

Le système a d'abord été résolu pour $a = \frac{1}{2}$ (cas du modèle $P - \theta$) (figure 5.2) puis pour $a = 1$ (cas équivalent au débit du modèle de Navier-Stokes) (figure 5.3). On remarque que lorsque l'on est à la position d'équilibre les positions de (α, β) sont les mêmes dans les deux cas.

Les positions des frontières (α, β) , une fois la convergence atteinte, sont identiques dans les deux cas seul l'interprétation de la hauteur du film d'huile et la valeur du Θ change.

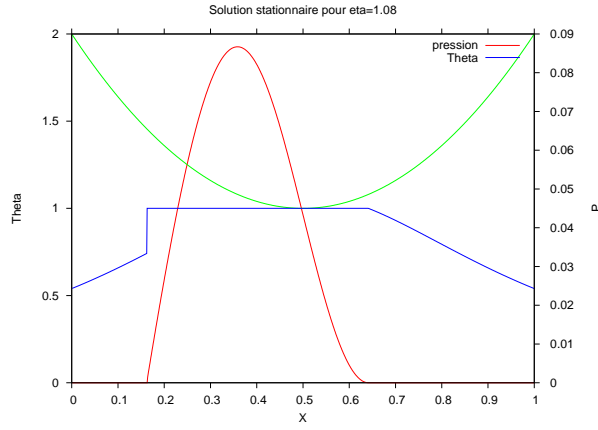


FIGURE 5.2 – Représentation de la pression P et de θ pour le modèle $(P - \theta)$ ($a = \frac{1}{2}$) pour un débit imposé $\theta(0, t)h(0) = 1.08$

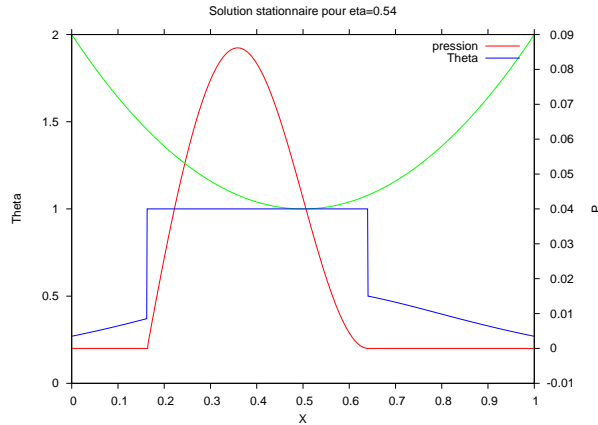


FIGURE 5.3 – Représentation de la pression P et de θ pour le modèle de Stokes ($a = 1$) pour un débit imposé $\theta(0, t)h(0) = 0.54$

Tout d'abord, nous avons étudié la trajectoire pour $a = 1$ et $\lambda = 0.2$, pour différentes positions initiales

5.3. RÉOLUTION ET RÉSULTATS

de (α_0, β_0) (figure 5.4).

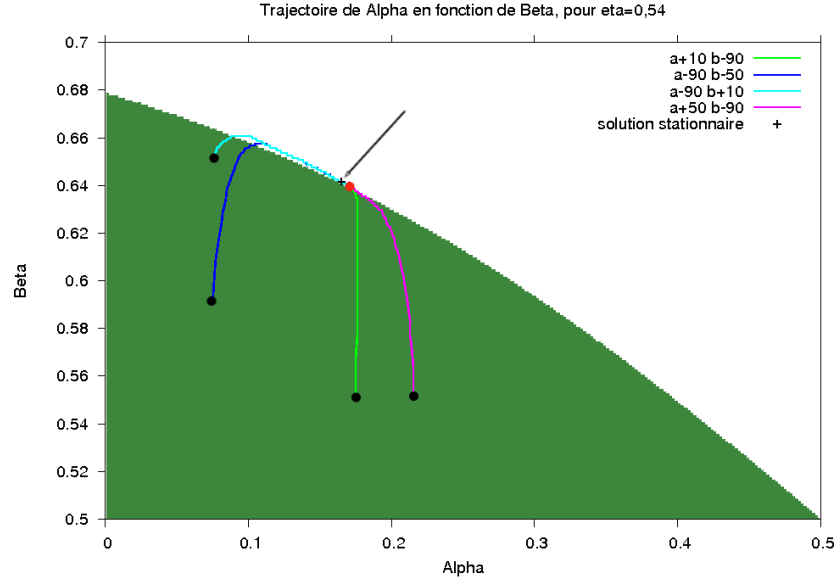


FIGURE 5.4 – Représentation de la trajectoire de $(\alpha(t), \beta(t))$ au cours du temps pour différentes positions initiales pour $a = 1$ et $\lambda = 0.2$ pour un débit imposé $\theta(0, t)h(0) = 0.54$

Le système converge vers une même valeur, et cela ne dépend pas du choix de $(\alpha_0, \beta_0) \in A_1$ pris mais uniquement du débit. Cela confirme les résultats théoriques du chapitre précédent.

Ensuite, nous avons étudié l'influence de la discrétisation en temps du problème (figure 5.5). La simulation pour différents pas de temps pour un même débit et une même position initiale (α_0, β_0) montre la convergence du modèle vers une unique solution (α_e, β_e) .

Ensuite, nous avons étudié l'influence du paramètre λ , introduit dans le modèle, sur la solution du problème et nous l'avons comparé à la solution du modèle classique $(P - \theta)$. Pour un débit de 0.52 en entrée et une position initiale des frontières, deux valeurs de λ ont été prises (figure 5.6- 5.7 -5.8) :

- $\lambda = 0$
- $\lambda = 0.5$

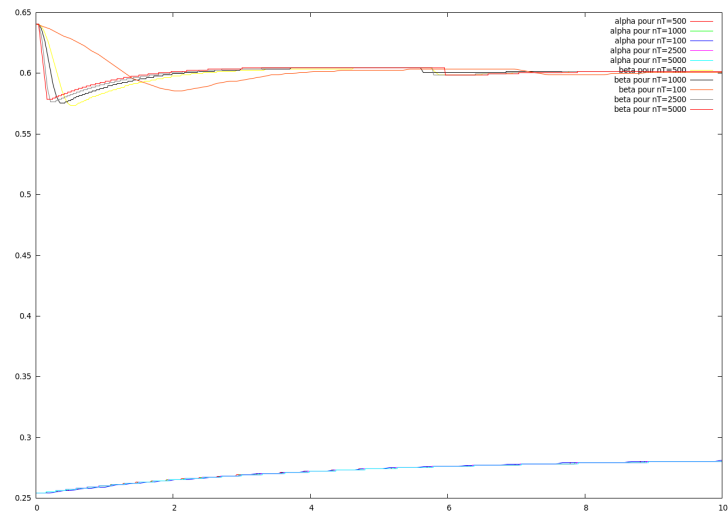
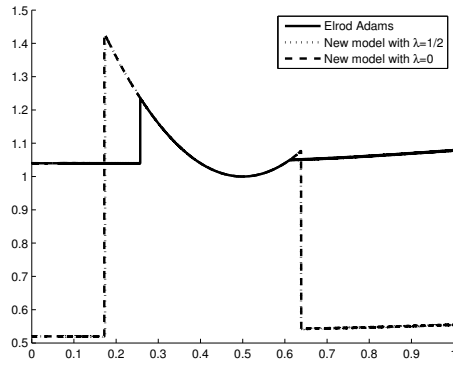
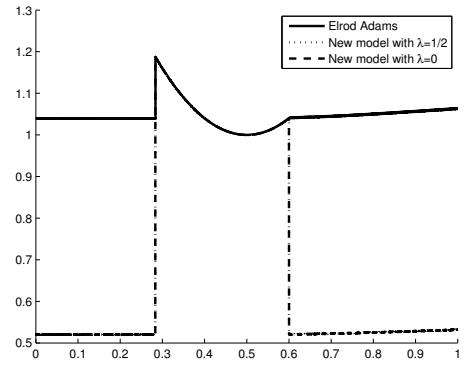


FIGURE 5.5 – Représentation de la trajectoire de $(\alpha(t), \beta(t))$ au cours du temps pour différents pas de temps Δt , une même position initiale de $(\alpha(0), \beta(0)) = (0.26, 0.64) \in A_1$ pour $a = 1$, $\lambda = 0.2$, pour un débit imposé $\theta(0, t)h(0) = 0.54$

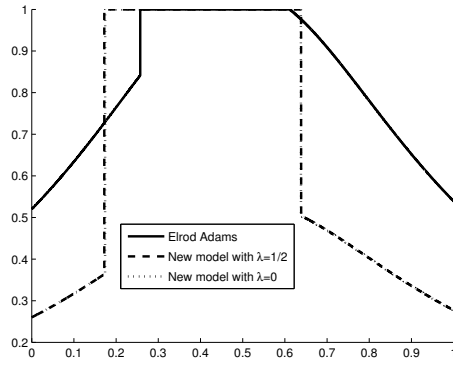
5.3. RÉSOLUTION ET RÉSULTATS



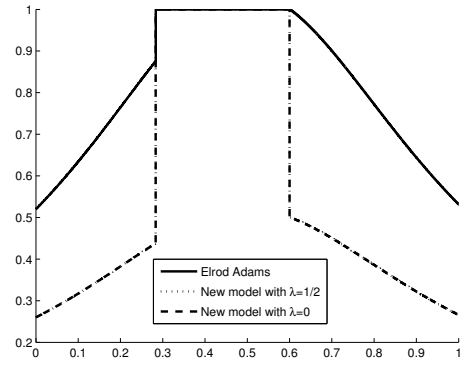
(a) Hauteur du film d'huile à $t = 4.8$



(b) Hauteur du film d'huile de la solution stationnaire



(c) Θ à $t = 4.8$



(d) Θ de la solution stationnaire

FIGURE 5.6 – Représentation de la hauteur de film d'huile et de Θ au cours du temps pour le nouveau modèle avec $\lambda = 0.5$ et $\lambda = 0$, et pour le modèle d'Elrod-Adams, pour une même position initiale de $(\alpha(0), \beta(0)) = (0.05, 0.53) \in A_1$ pour $a = 1$, pour un débit imposé $\Theta(0, t)h(0) = 0.52$

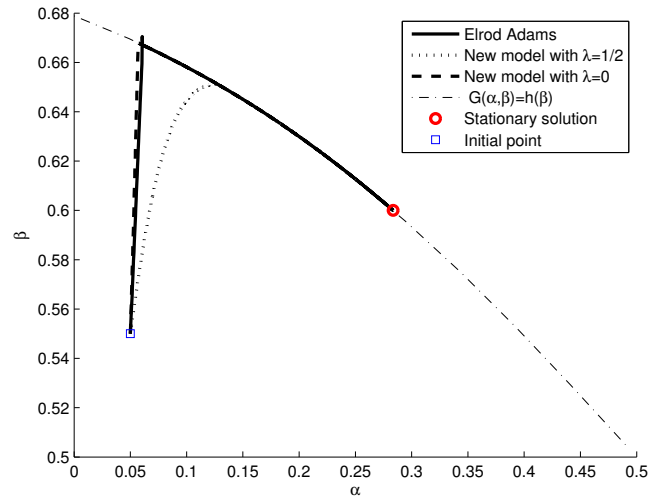


FIGURE 5.7 – Trajectoire de (α, β) au cours du temps pour le modèle $(P - \theta)$ et le nouveau modèle avec $\lambda = 0$ et $\lambda = 0.5$

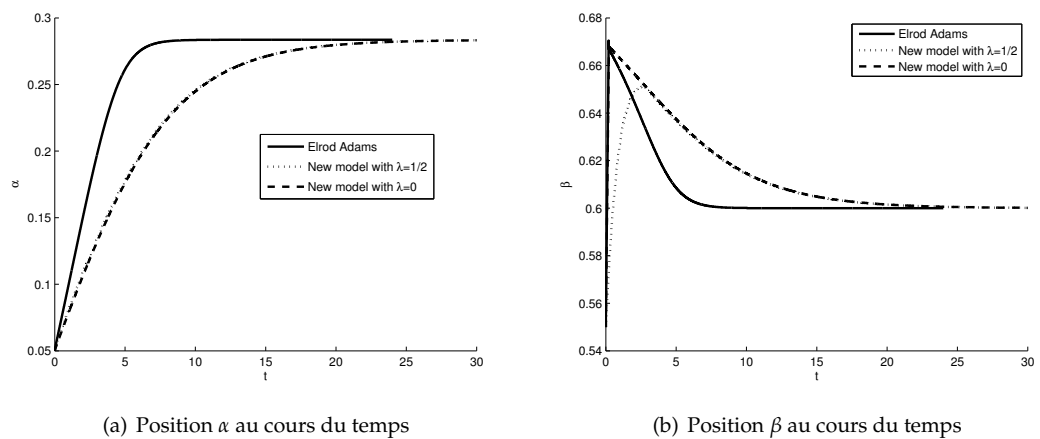


FIGURE 5.8 – Trajectoire de α et β au cours du temps pour le modèle $(P - \theta)$ et le nouveau modèle avec $\lambda = 0$ et $\lambda = 0.5$

5.3. RÉSOLUTION ET RÉSULTATS

En 1D, le nouveau modèle et celui d'Elrod-Adams ($P - \theta$) convergent vers la même solution stationnaire (figures 5.6(b), 5.6(d)). Cependant l'évolution des hauteurs du film d'huile ainsi que les positions des frontières libres sont très différentes dans les deux modèles. L'évolution de la pression sera donc elle aussi différente.

Dans le modèle d'Elrod-Adams, la condition $\theta(\beta, t) = 1$ à la frontière de rupture permet de "déplacer" $\beta(t)$ directement sur la frontière de A_1 , c'est à dire sur la courbe d'équation $G(\alpha, \beta) = h(\beta)$. Ainsi pour $\alpha(t)$ fixé, le modèle trouve le $\beta(t)$ générant la pression hydrodynamique positive la plus élevée.

Dans le nouveau modèle, la prise en compte de la hauteur de film $\Theta.h$ entraîne un débit cohérent, cela permet notamment d'étudier le cas de plusieurs convergents-divergents sans avoir de problème quant au choix de la quantité de fluide à prendre en compte entre les géométries. Dans le cas d'un piston muni de trois segments espacés chacun de quelques millimètres, nous pouvons ainsi connaître la quantité de fluide adhérent à la paroi.

Ce nouveau modèle est une amélioration du modèle d'Elrod-Adams permettant de connaître la quantité de fluide adhérente à la paroi, tout en gardant la propriété fondamentale de la conservation de la masse. Il reste cependant le problème de la détermination du paramètre λ qui peut être facilement ajusté en dimension 1, mais qui le sera moins en dimension 2. Nous risquerions ainsi de perdre les propriétés locales des micro-géométries, les vallées devant avoir à priori des λ plus élevés que les plateaux.

CHAPITRE 6

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce manuscrit, nous avons étudié le contact lubrifié Piston / Segment / Chemise en couplant un modèle de cavitation classique parabolique-hyperbolique ($P - \theta$) et un modèle statistique de contact (Greenwood-Williamson-Tripp). Ensuite les micro-géométries de surfaces réelles ont été prise en compte en utilisant de petits échantillons de surfaces fournies par Renault ($2mm \times 2mm$), et en les dupliquant en conservant le recollement des stries. Cette approche soulève plusieurs problèmes, tant par le choix d'une méthode permettant de générer une surface infinie avec un échantillon restreint, que par l'utilisation d'un modèle statistique dont les hypothèses ne sont souvent plus vérifiées localement. Des difficultés apparaissent notamment par le fait de la détermination d'un "plan" correspondant à la répartition Gaussienne de ces hauteurs des rugosités de plateaux sur tout l'échantillon et non localement sous la surface sur segment. Par ailleurs, une étude de sensibilité des paramètres pour la loi de contact a été menée, montrant l'importance et les conséquences de la détermination de ces variables.

Enfin, une comparaison de deux surfaces a été réalisée. Ces surfaces ont des orientations des stries, des formes de motif et des répartitions des rugosités différentes. Nous avons ainsi montré l'importance de la profondeur des stries sur la quantité d'huile restant sous le segment, et la capacité de la surface à supporter ainsi une plus grande charge. Une corrélation avec des résultats avec des essais Renault a été effectuée montrant un écart important des coefficients de frottement linéique mais des tendances semblables notamment en régime mixte.

Le modèle actuel a ses limites. D'une part sa résolution demande des temps de calcul très longs, ceci étant dû à la non-linéarité du modèle hydrodynamique. D'autre part l'interprétation de θh comme quantité de fluide soulève des difficultés, car l'équation de conservation de la masse entraîne une vitesse de déplacement du fluide divisée par deux, incohérente avec le débit réel.

En ce qui concerne l'accélération de la résolution du problème, des progrès ont été obtenus en optimisant le code et en utilisant des compilateurs commerciaux. Nous pourrions à l'avenir envisager des solveurs parallèles comme le proposent Vijayaraghavan et Keith [VK90], ou des méthodes de décomposition de domaines.

Pour finir, une modification du modèle ($P - \theta$) a été proposée en une dimension afin d'avoir une cohérence entre la hauteur du film adhérent à la paroi de la chemise, la vitesse relative du piston et le débit. Sur ce nouveau modèle de cavitation, le travail restant est important, le cas d'un segment dynamique, ou le cas d'un débit variable n'ayant pas encore été étudiés. Nous pouvons aussi essayer de trouver un modèle annexe permettant de déterminer de manière précise la variable λ . Cette variable pourrait ainsi devenir une fonction variable au cours du temps. Enfin le cas de la dimension deux est à traiter, et les résultats doivent être corrélés avec des essais ou simplement avec le modèle ($P - \theta$) classique.

Bibliographie

- [44309] Règlement (CE) établissant des normes de performance en matière d'émissions pour les voitures particulières neuves dans le cadre de l'approche intégrée de la communauté visant à réduire les émissions de CO_2 des véhicules légers. Journal Officiel, April 2009. <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=CELEX:32009R0443:FR:NOT>.
- [ade10] Energie et climat chiffres clés 2009. Technical report, A.D.E.M.E, November 2010. <http://www2.ademe.fr/servlet/getDoc?cid=96&m=3&id=74303&p1=00&p2=12&ref=17597>.
- [AJB09] R. F. Ausas, M. Jai, and G. C. Buscaglia. A mass-conserving algorithm for dynamical lubrication problems with cavitation. *ASME*, 131, july 2009.
- [AOM97] C. Arcoumanis, P. Ostova, and R. Mortier. Mixed lubrication modeling of newtonian and shear thinning liquids in a piston-ring configuration. *SAE international Fuels & Lubricants Meeting & Exposition*, October 1997.
- [ARL⁺07] R. F. Ausas, P. Ragot, J. Leiva, M. Jai, G. Bayada, and G. C. Buscaglia. The impact of the cavitation model in the analysis of microtextured lubricated journal bearings. *ASME*, 129 :868–875, October 2007.
- [BC86] G. Bayada and M. Chambat. Sur quelques modélisations de la zone de cavitation en lubrification hydrodynamique. *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, 5(5) :703–729, 1986.
- [BC12] Guy Bayada and Laurent Chupin. Thin film compressible model and J.F.O Elrod-Adams conservative cavitation model. *submitted to ASME Journal of tribology*, 2012.
- [BC83] G. Bayada and M. Chambat. Analysis of a free boundary problem in partial lubrication. *Quart. Appl. Math.*, 40(4) :369–375, 1982/83.
- [BCA90] G. Bayada, M. Chambat, and M. El Alaoui. Variational formulations and finite element algorithms for cavitation problems. *Journal of Tribology*, 112(2) :398–403, 1990.
- [BCV98] G. Bayada, M. Chambat, and C. Vázquez. Characteristics method for the formulation and computation of a free boundary cavitation problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 98(2) :191–212, 1998.
- [BF89] G. Bayada and J. B. Faure. A double scale analysis approach of the reynolds roughness comments and application to the journal bearing. *Journal of Tribology*, 111 :323–330, April 1989.
- [BH63] G. Birkhoff and D. F. Hays. Free boundaries in partial lubrication. *Harvard University*, pages 126–138, 1963.

BIBLIOGRAPHIE

- [BH84] M. J. Braun and R. C. Hendricks. An experimental investigation of the vaporous/gaseous cavity characteristics of an eccentric journal bearing. *A S L E Transactions*, 27(1) :1–14, 1984.
- [BH10] M J Braun and W M Hannon. Cavitation formation and modelling for fluid film bearings : A review. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, 224(9) :839–863, 2010.
- [BV07] G. Bayada and C. Vázquez. A survey on mathematical aspects of lubrication problems. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.*, 39 :31–74, June 2007.
- [CC83] G. Capriz and G. Cimatti. Partial lubrication of full cylindrical bearings. *Journal of Lubrication Technology*, 105(1) :84–89, 1983.
- [C.C94] C.C.N.U.C.C. Convention-cadre des nations unies sur les changements climatiques. March 1994. <http://unfccc.int/resource/docs/convkp/convfr.pdf>.
- [CCB04] P. Cornet, O. Carrie, and G. Bretagnol. Piston, segment, consommation d’huile. Technical report, Renault, 2004. Communication et diffusion externe interdites.
- [CH70] J. C. Coyne and Jr. H. G. Elrod. Conditions for the rupture of a lubricating film. part i : Theoretical model. *Journal of Lubrication Technology*, 92(3) :451–456, 1970.
- [CH71] J. C. Coyne and Jr. H. G. Elrod. Conditions for the rupture of a lubricating film—part ii : New boundary conditions for reynolds equation. *Journal of Lubrication Technology*, 93(1) :156–167, 1971.
- [CH07] H. L. Costa and I. M. Hutchings. Hydrodynamic lubrication of textured steel surfaces under reciprocating sliding conditions. *tribology international*, 40 :1227–1238, 2007.
- [Cha11] Sujana Chandrasekar. *Finite element based modeling of multi-asperity contact and validation of Greenwood-Williamson model*. PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2011.
- [Cry71] C. W. Cryer. The method of Christopherson for solving free boundary problems for infinite journal bearings by means of finite differences. *Mathematics of computation*, 25(115) :435–443, July 1971.
- [CS12] Laurent Chupin and Rémy Sart. Compressible flows : New existence results and justification of the Reynolds asymptotic in thin films. *Asymptotic Analysis*, 76(Issue - 3) :193–231, March 2012.
- [DT74] D. Dowson and C. M. Taylor. Fundamental aspects of cavitation in bearings. In *Cavitation and related phenomena in lubrication*, Proceeding of the 1st Leeds-Lyon Symposium on Tribology held in the Institute Of Tribology, pages 15–28, 1974.
- [EA74] H. G. Elrod and M. L. Adams. A computer program for cavitation and starvation problems. *Proceedings of the 1st Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, vol 1. :37–41, 1974.
- [Edg11] Engineers Edge. Surface roughness review. Technical report, Engineers Edge, 2011.
- [Elr81] H. G. Elrod. A cavitation algorithm. *Journal of Lubrication Technology*, 103(3) :350–354, 1981.
- [EP98] I. Etsion and A. A. Polycarpou. Static friction of contacting real surfaces in the presence of sub-boundary lubrication. *ASME*, 120 :296–303, 1998.
- [ES09] I. Etsion and E. Sher. Improving fuel efficiency with laser surface textured piston rings. *tribology international*, 42 :542–547, 2009.

- [Ets05] I. Etsion. State of the art in laser surface texturing. *Journal of Tribology*, 127(1) :248–253, 2005.
- [Fou94] E. Foussat. *Approche d'un critère de grippage au travers de la rupture du film elastohydrodynamique*. PhD thesis, INSA Lyon, May 1994.
- [FRD90] J. Frene, G. Riollot, and B. Degueurce. *Lubrification*. Eyrolles, 1990.
- [FRV01] François and Robbe-Valloire. Statistical analysis of asperities on a rough surface. *Wear*, 249(5-6) :401–408, 2001.
- [GT71] J. A. Greenwood and J. H. Tripp. The contact of two nominally flat rough surfaces. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 185(48/71) :625–633, June 1971.
- [GW66] J. A. Greenwood and J. B. P. Williamson. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of Royal Society*, pages 300–319, 1966.
- [HCAK94] Y. Hu, H. S. Cheng, T. Arain, and Y. Kobayashi. Numerical simulation of piston ring in mixed lubrication - a nonaxisymmetrical analysis. *Journal of Tribology*, 116 :470–478, 1994.
- [HPKP92] Z. Handzel-Powierza, T. Klimczak, and A. Polijaniuk. On the experimental verification of the greenwood-williamson model for the contact of rough surfaces. *Wear*, 154(1) :115–124, 1992.
- [Mcc86] J. I. McCool. Comparison of models for the contact of rough surfaces. *WEAR*, 107, 1986.
- [Mey81] G. H. Meyer. An analysis of the method of lines for the Reynolds equation in hydrodynamic lubrication. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18(1) :165–177, 1981.
- [Org07] M. Organisciak. *Optimisation de la microgeometrie des chemises de moteurs a combustion interne*. PhD thesis, INSA Lyon, 2007.
- [PCM09] P. Pawlus, T. Cieslak, and T. Mathia. The study of cylinder liner plateau honing process. *Journal of Materials Processing Technology*, 2009.
- [PDT99] M. Priest, D. Dowson, and C. M. Taylor. Predictive wear modelling of lubricated piston rings in a diesel engine. *Wear*, 231(1) :89–101, 1999.
- [PDT00] M. Priest, D. Dowson, and C. M. Taylor. Theoretical modelling of cavitation in piston ring lubrication. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 214(3) :435–447, 2000.
- [PJ03] U. Pettersson and S. Jacobson. Influence of surface texture on boundary lubricated sliding contacts. *Tribology International*, 36 :857–864, 2003.
- [PJ07] U. Pettersson and S. Jacobson. Textured surfaces for improved lubrication at high pressure and low sliding speed of roller/piston in hydraulic motors. *tribology international*, 40 :355–359, 2007.
- [PKR08] C. H. T. Pan, T. H. Kim, and J. J. Rencis. Rolling stream trails : An alternative cavitation analysis. *Journal of Tribology*, 130(2) :021703, 2008.
- [PS08] A.P. Panayi and H.J. Schock. Approximation of the integral of the asperity height distribution for the greenwood-tripp asperity contact model. *Imech*, 222 :165–169, 2008.
- [Rey86] O. Reynolds. On the theory of the lubrication and its application to mr beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of the olive oil. *Phil. Trans R.*, 177, 1886.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ric00] D. E. Richardson. Review of power cylinder friction for diesel engines. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 122(4) :506–519, 2000.
- [Swa74] P. D. Swales. A review of cavitation phenomena in engineering situations. In *Cavitation and related phenomena in lubrication*, Proceeding of the 1st Leeds-Lyon Symposium on Tribology held in the Institute Of Tribology, 1974.
- [Tay98] C. M. Taylor. Automobile engine tribology—design considerations for efficiency and durability. *Wear*, 221(1) :1–8, 1998.
- [TCT03] Eduardo Tomanik, Haroldo Chacon, and Giovanni Teixeira. A simple numerical procedure to calculate the input data of greenwood-williamson model of asperity contact for actual engineering surfaces. 41 :205–215, 2003.
- [TN01] E. Tomanik and Francisco E.B. Nigro. Piston ring pack and cylinder wear modelling. *Society of Automotive Engineers*, pages 585–595, 2001.
- [Tom05] E. Tomanik. "Modelling of the Asperity Contact Area on Actual 3D Surfaces". *SAE Technical Paper*, pages 2005-01-1864, 11 April 2005.
- [TPZ11] E. Tomanik, F. Profito, and D. Zachariadis. Modelling of the hydrodynamic support of laser surface texturing on cylinder bore and piston rings. *Tribology International*, September 2011.
- [Val05a] R. Valoire. *Analyse du contact*. ISMEP Paris, 2005.
- [Val05b] R. Valoire. *Lubrification*. Supmeca Paris, 2005.
- [Via] Rabhi Vianney. Repousser les limites de la réduction de consommation de carburant. http://www.mce-5.com/pop_up/atouts_technologiques/pdf/Reduit_frottements_FR.pdf.
- [VK90] D. Vijayaraghavan and Jr. T. G. Keith. An efficient, robust, and time accurate numerical scheme applied to a cavitation algorithm. *Journal of Tribology*, 112(1) :44–51, 1990.
- [WCS08] Krisada Wannatong, Somchai Chanchaona, and Surachait Sanitjai. Simulation algorithm for piston ring dynamics. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 16 :127–146, 2008.
- [WiNH⁺00] Kenji Watanabe, Jyun ichi Natsume, Katsuyuki Hashizume, Toshihiro Ozasa, Takashi Noda, and Yoshihiko Masuda. Theoretical analysis of bearing performance of microgrooved bearing. *Society of Automotive Engineers of Japan*, 21 :29–33, 2000.
- [ZMC00] Yongwu Zhao, David M. Maietta, and L. Chang. An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation to fully plastic flow. *Journal of Tribology*, 122(1) :86–93, 2000.